**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**
**Disciplina: MAT01168 -Matemática Aplicada -Semestre Letivo 2008/2**
**Professoras: Elisabeta Gallicchio e Irene Strauch**
**TERCEIRA ÁREA**

**SÉRIES DE FOURIER UTILIZANDO O MAPLE**

**Aula do dia 03/11/2008** **CASO I**

# Cálculo da série de Fourier de uma função f(x) periódica, ou seja, f(x+T) = f(x), com período T=2L, definida no intervalo simétrico [-L,L].

Objetiva-se representar a função f(x) pela série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Deve-se mostrar que:

**a)** $\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\}$, n=1,2,3..., um conjunto infinito de funções, forma uma base ortogonal, no intervalo [-L,L], com o produto interno

$$\left(\Phi_m, \Phi_n\right) = \int_{-L}^{L} \Phi_m(x)\, \Phi_n(x)\, dx\ ,$$

sendo a norma quadrática dada por

$$\|\Phi_m(x)\|\ \hat{}\,2 = \int_{-L}^{L} \Phi_m(t)^2\, dt.$$

---

**b)** os coeficientes Euler- Fourier $a_o$, an e bn são dados por:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1\left(\int_{-L}^{L} f(x)\, dx\right)}{2L}\ ,\ a_n = \frac{1\left(\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right)}{L} \quad \text{e}$$

$$b_n = \frac{1\left(\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right)}{L},$$

ou seja, os coeficientes $c_k$ são calculados com a fórmula $c_k = \dfrac{\int_{-L}^{L} f(x)\, \Phi_k(x)\, dx}{\left|\Phi_k(x)\right|^2}$ .

Demonstrado em aula.

**Prova das Relações de Ortogonalidade** no intervalo [-L, L]**:**

$\left(\Phi_m, \Phi_n\right) = \int_{-L}^{L} \Phi_m(x)\, \Phi_n(x)\, dx=0.$

```
> restart:assume(n,integer):assume(m,integer):interface
  (showassumed=0):#Para a simplificação dos coeficientes,
  explicita-se que n, m  são números inteiros
> P1:=int(cos(n*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$P1 := 0 \tag{1.1}$$

```
> P2:=int(sin(n*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$P2 := 0 \tag{1.2}$$

```
> P3:=int(cos(n*Pi*x/L)*cos(m*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$P3 := 0 \tag{1.3}$$

```
> P4:=int(sin(n*Pi*x/L)*sin(m*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$P4 := 0 \tag{1.4}$$

```
> P5:=int(cos(n*Pi*x/L)*sin(m*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$P5 := 0 \tag{1.5}$$

## Cálculo da Norma Quadrática

```
> Norma1:=int(cos(n*Pi*t/L)^2,t=-L..L);Norma2:=int(sin(n*Pi*x/L)^2,
  x=-L..L);Norma3:=int(1,x=-L..L);
```

$$Norma1 := L \tag{1.6}$$

$$Norma2 := L$$

$$Norma3 := 2\,L$$

================================================================================================

## Teorema da Convergência:

H1) f periódica, f(x+2L)=f(x)

H2) f definida, exceto em um número finito de pontos, no intervalo -L < x < L;

H3)  f e f 'seccionalmente contínuas no intervalo -L < x < L;

Então, a série de Fourier da função converge para a f(x)  nos pontos x onde a função f é contínua e converge para $\dfrac{f(x+\epsilon)+f(x-\epsilon)}{2}$ , nos pontos onde a funcão é descontínua.

==================================================================================================

**Exemplo** (exercício resolvido em aula)

Determinar a série de Fourier da função f(t)=0, -5< x <0  e  f(x)=3, 0< x <5 , f(x+10)=f(x)

**Resolução:**

```
> restart:with(plots):with(plottools):assume(n,integer):interface
  (showassumed=0):#Para não exibir n~
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

Dados o período T=2L e a função periódica e seccionalmente contínua, definida por f(t)=0, -5<t<0 e f(t)=3, 0<t<5

```
> T:=10:L :=T/2;
```

$$L := 5 \tag{2.1}$$

Definir a função periódica a ser expandida em série de Fourier

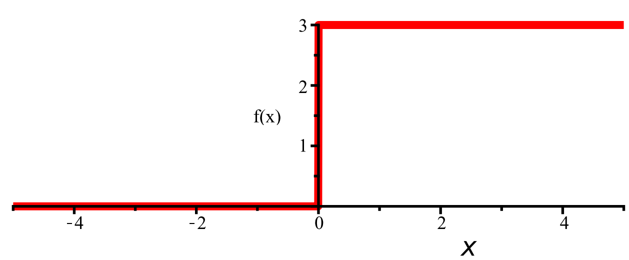
```
> f(x):=piecewise(x>=-L and x<0,0,0<x and x<=L,3);
```

$$f(x) := \begin{cases} 0 & -5 - x \le 0 \textbf{ and } x < 0 \\ 3 & -x < 0 \textbf{ and } x - 5 \le 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Traçar o gráfico da função f(x) definida acima

```
> plot(f(x),x=-L..L,thickness=3,scaling=constrained,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,16],labels=[x, "f(x)"],labelfont=[COURIER,
  DEFAULT,16],title=`Gráfico de f(x)`);
```

Gr�fico de f(x)




Determinar os coeficientes $C_k = ( f(x), \Phi_n(x)) /\| \Phi_n(x)\|$^2 da série de Fourier, para n =1,2,3,...

```
> a[n]:=int(f(x)*cos(n*Pi/L*x),x=-L..L)/L;
```

$$a_{n\sim} := 0 \tag{2.3}$$

Calcular o coeficiente $a_0$

```
> a[0]:= simplify(int(f(x),x=-L..L)/L);
```

$$a_0 := 3 \tag{2.4}$$

A seguir, os coeficientes $b_n$, para n=1,2,3,...

```
> b[n]:=int(f(x)*sin(n*Pi/L*x),x=-L..L)/L;
```

$$b_{n\sim} := -\frac{3\left(\left(-1\right)^{n\sim}-1\right)}{n\sim\,\pi} \tag{2.5}$$

```
> serie_def(x):=a[0]/2+ Sum(a[n]*cos(n*Pi/L*x)+b[n]*sin(n*Pi/L*x),
  n=1..infinity);
```

$$serie\_def(x) := \frac{3}{2} + \sum_{n\sim=1}^{\infty}\left(-\frac{3\left(\left(-1\right)^{n\sim}-1\right)\sin\left(\frac{n\sim\,\pi\,x}{5}\right)}{n\sim\,\pi}\right) \tag{2.6}$$

Aproximar a função f(x) com a série truncada até n=3 termos.

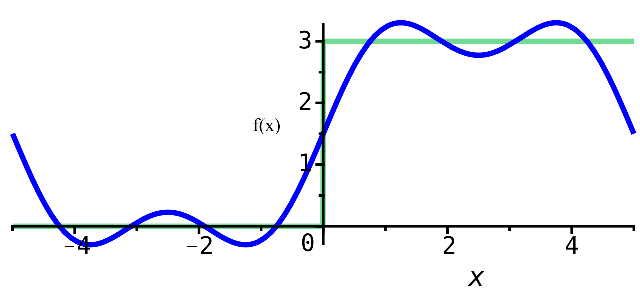
```
> f_ap3(x):=a[0]/2+ sum(a[n]*cos(n*Pi/L*x)+b[n]*sin(n*Pi/L*x),n=1.
  .3);
```

$$f\_ap3(x) := \frac{3}{2} + \frac{6\sin\left(\frac{\pi\,x}{5}\right)}{\pi} + \frac{2\sin\left(\frac{3\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi} \tag{2.7}$$

Traçar os gráficos da função dada e da sua aproximação em série de Fourier truncada.

```
> plot({f(x),f_ap3(x)},x=-L..L,discont=true,scaling=constrained,
  titlefont=[COURIER,DEFAULT,14],labels=[x, "f(x)"],labelfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,14],title=
  `Gráficos de f(x) e a Série de Fourier para n=3`, thickness=2,
  color=[aquamarine,blue]);
```

Gr�ficos de f(x) e a S�rie de Fourier para n=

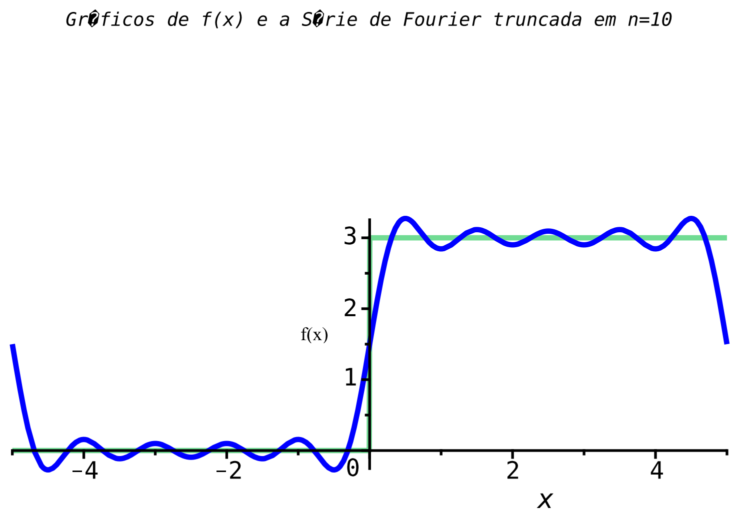



Aumentando o número de termos, obtém-se uma melhor aproximação. Por exemplo, para n=10 tem-se:

```
> f_ap10(x):=a[0]/2+ sum(a[n]*cos(n*Pi/L*x)+b[n]*sin(n*Pi/L*x),n=1.
  .10);
```

```
> plot({f(x),f_ap10(x)},x=-L..L,thickness=2,scaling=constrained,
  titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=[x,"f(x)"],labelfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,14],color=
  [aquamarine,blue],title=`Gráficos de f(x) e a Série de Fourier
  truncada em n=10`);
```

$$f\_ap10(x) := \frac{3}{2} + \frac{6 \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{2 \sin\left(\frac{3 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{5} \frac{\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{6}{7} \frac{\sin\left(\frac{7 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{2}{3} \frac{\sin\left(\frac{9 \pi x}{5}\right)}{\pi}$$




Para n=20

```
> f_ap50(x):=a[0]/2+ sum(a[n]*cos(n*Pi/L*x)+b[n]*sin(n*Pi/L*x),n=1.
  .50);
> plot({f(x),f_ap50(x)},x=-L..L,discont=true,thickness=2, scaling=
  constrained,color=[aquamarine,blue],titlefont=[COURIER,DEFAULT,
  12],labels=[x, "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,14],title=`Gráficos de f(x) e a Série de Fourier
  truncada em n=50`);
```

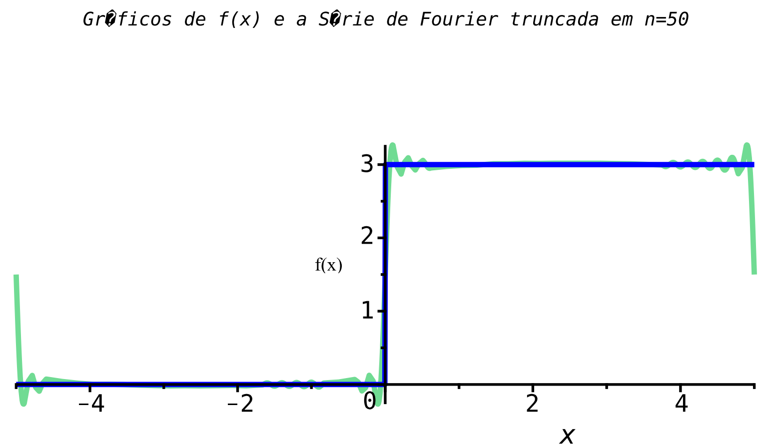
$$f\_ap50(x) := \frac{2}{15} \frac{\sin(9 \pi x)}{\pi} + \frac{6}{47} \frac{\sin\left(\frac{47 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{49} \frac{\sin\left(\frac{49 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{37} \frac{\sin\left(\frac{37 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{2}{13} \frac{\sin\left(\frac{39 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{41} \frac{\sin\left(\frac{41 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{2}{9} \frac{\sin\left(\frac{27 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{31} \frac{\sin\left(\frac{31 \pi x}{5}\right)}{\pi}$$

$$+\frac{2}{11}\frac{\sin\left(\frac{33\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{35}\frac{\sin(7\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{2}{5}\frac{\sin(3\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{2}{7}\frac{\sin\left(\frac{21\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}$$

$$+\frac{6}{23}\frac{\sin\left(\frac{23\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{25}\frac{\sin(5\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{3}{2}+\frac{6}{13}\frac{\sin\left(\frac{13\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{17}\frac{\sin\left(\frac{17\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}$$

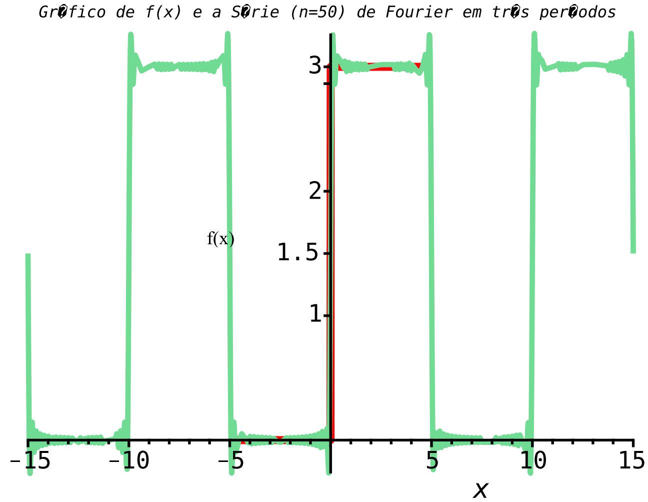
$$+\frac{6}{19}\frac{\sin\left(\frac{19\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{11}\frac{\sin\left(\frac{11\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{29}\frac{\sin\left(\frac{29\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{43}\frac{\sin\left(\frac{43\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}$$

$$+\frac{6\sin\left(\frac{\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{2\sin\left(\frac{3\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{5}\frac{\sin(\pi\,x)}{\pi}+\frac{6}{7}\frac{\sin\left(\frac{7\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{2}{3}\frac{\sin\left(\frac{9\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}$$




Observe o que acontece nos pontos (x= -5,x =0 e x=5) onde a função apresenta descontinuidades tipo salto: aparecem oscilações! Tem-se o **fenômeno de Gibbs.** Note que, mesmo aumentando o número de termos na série truncada, as oscilações não desaparecem. Nestes pontos, acontece a convergência em média f(x)=(f(x+) +f(x-))/2, ou seja, a série da função converge para 1.5, isto é, para a média dos valores limites da função à direita e à esquerda do ponto de descontinuidade. Nas oscilações, fenômeno de Gibbs, mínimo valor 9% da descontinuidade ordinária. A seguir, observe o eixo das ordenadas e verifique o mínimo valor da oscilação.

```
> G1:=plot(f(x),x=-L..L,thickness=3,discont=true):
> G2:=plot({f_ap50(x)},x=-3*L..3*L,color=aquamarine,discont=true,
  thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,10],labelfont=[COURIER,
  DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,14],title=`Gráfico de f(x)
  e a Série (n=50) de Fourier em três períodos`):plots[display](G1,
  G2,labels=[x, "f(x)"],ytickmarks=[1,1.5,2,2.865,3]);
```




Agora , para visualizar como a seqüência de somas parciais se aproxima da função, ou seja, para examinar a convergência, vamos construir os gráficos de $|f(x) - S_N|$, onde $S_N$ denota as soms parciais para N=3,10 e 50 termos

```
> f1:=abs(f(x)-f_ap3(x));
```

$$f1 := \left| \left( \begin{cases} 0 & -5 - x \le 0 \text{ and } x < 0 \\ 3 & -x < 0 \text{ and } x - 5 \le 0 \end{cases} \right) - \frac{3}{2} - \frac{6 \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)}{\pi} - \frac{2 \sin\left(\frac{3 \pi x}{5}\right)}{\pi} \right| \quad \textbf{(2.8)}$$

```
> g1:=plot(f1,x=-L..0,color=green):
> f2:=expand(simplify(evalf(abs(f(x)-f_ap10(x)))));
```

$$f2 := \left| \begin{cases} -1.500000000 - 1.909859317 \sin(0.6283185308\, x) - 0.6366197722 \sin(1.884955592\, x) - 0.381971 \\ 1.500000000 - 1.909859317 \sin(0.6283185308\, x) - 0.6366197722 \sin(1.884955592\, x) - 0.3819718 \\ -1.500000000 - 1.909859317 \sin(0.6283185308\, x) - 0.6366197722 \sin(1.884955592\, x) - 0.381971 \end{cases} \right|$$

```
> g2:=plot(f2,x=-L..0,color=magenta):
> f3:=abs(f(x)-f_ap50(x));
```

$$f3 := \left| \frac{2}{15} \frac{\sin(9 \pi x)}{\pi} + \frac{6}{47} \frac{\sin\left(\frac{47 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{49} \frac{\sin\left(\frac{49 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{37} \frac{\sin\left(\frac{37 \pi x}{5}\right)}{\pi} \right. \quad \textbf{(2.10)}$$

$$+ \frac{2}{13} \frac{\sin\left(\frac{39 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{6}{41} \frac{\sin\left(\frac{41 \pi x}{5}\right)}{\pi} + \frac{2}{9} \frac{\sin\left(\frac{27 \pi x}{5}\right)}{\pi}$$

$$+\frac{6}{31}\,\frac{\sin\left(\frac{31\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{2}{11}\,\frac{\sin\left(\frac{33\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{35}\,\frac{\sin(7\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{2}{5}\,\frac{\sin(3\,\pi\,x)}{\pi}$$

$$+\frac{2}{7}\,\frac{\sin\left(\frac{21\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{23}\,\frac{\sin\left(\frac{23\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{25}\,\frac{\sin(5\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{3}{2}$$

$$+\frac{6}{13}\,\frac{\sin\left(\frac{13\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{17}\,\frac{\sin\left(\frac{17\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{19}\,\frac{\sin\left(\frac{19\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}$$

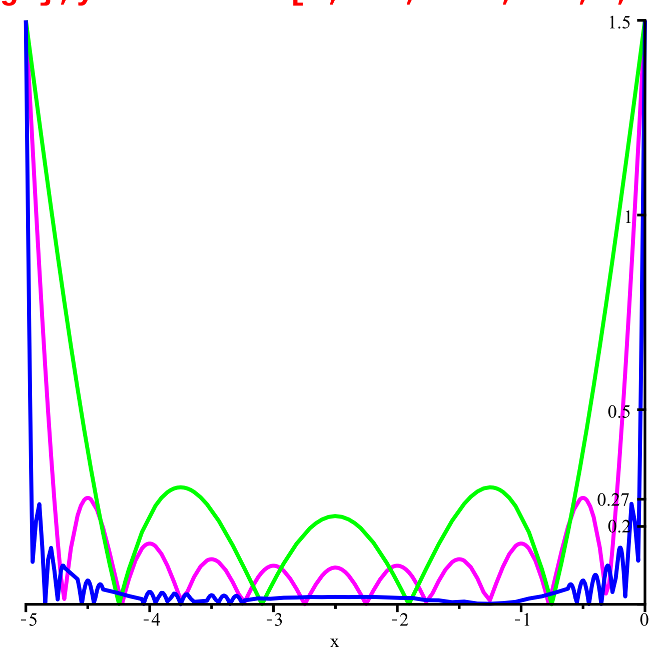
$$+\frac{6}{11}\,\frac{\sin\left(\frac{11\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{29}\,\frac{\sin\left(\frac{29\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{43}\,\frac{\sin\left(\frac{43\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}-\Bigg($$

$$\begin{cases} 0 & -5-x\leq 0\ \textbf{and}\ x<0 \\ 3 & -x<0\ \textbf{and}\ x-5\leq 0 \end{cases}\Bigg)+\frac{6\sin\left(\frac{\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{2\sin\left(\frac{3\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{6}{5}\,\frac{\sin(\pi\,x)}{\pi}$$

$$+\frac{6}{7}\,\frac{\sin\left(\frac{7\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}+\frac{2}{3}\,\frac{\sin\left(\frac{9\,\pi\,x}{5}\right)}{\pi}$$

```
> g3:=plot(f3,x=-L..0,color=blue):
```

```
> display({g1,g2,g3},ytickmarks=[0,0.2,0.27,0.5,1,1.5]);
```




Observe que em x=0 e em x=-5, tem-se um pulo para a média dos valores, ou seja 3/2 . Os valores das oscilações, perto das extremidades,  ficam em torno de 0.27 (perto de 9% de 3)

=========================================================================

=============================