UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Disciplina: MAT01168 -Matemática Aplicada -Semestre Letivo 2008/2
Professoras: Elisabeta Gallicchio e Irene Strauch
TERCEIRA ÁREA

SÉRIES DE FOURIER UTILIZANDO O MAPLE

Aula do dia 05/11/2008 (Continuação) **CASO III**

Funções definidas em meio intervalo

Extensões Par, Ímpar e Periódica

EXPANSÃO em SÉRIE FOURIER SENO e SÉRIE FOURIER CO-SENO (SEMI-SÉRIE DE FOURIER)

Este arquivo será útil quando a função for definida na metade de um intervalo, ou seja, em 0<x<L. Há três maneiras de prolongar a função em -L<x<0. Como uma função ímpar ou como uma função par em [-L,L] Especialmente, estas duas maneiras serão úteis quando se deseja **determinar a expansão de uma função em série Fourier seno ou série Fourier co-seno.** A terceira, é considerá-la periódica de período fundamental igual ao meio-intervalo, ou seja T=L. Este último, não é muito utililizado, pois, a série poderia, em geral, conter termos em seno e co-seno ao mesmo tempo (ou o termo em a_0 e os termos em seno) e aqui, tem-se como objetivo desenvolver a função em série Fourier seno somente ou só série Fourier co-seno.

EXTENSÃO ÍMPAR

Completa-se a função f(x), no intervalo -L<x<0, como sendo uma função ímpar de período T=2L, ou seja, f(-x)= -f(x) para -L<x<L. E, após, expande-se em série de Fourier seno sobre o intervalo [-L L]. Neste caso, não há necessidade de calcular os coeficientes a_n, pois, sendo a função ímpar em [-L,L], os coeficientes $a_n = 0$, **para todo n**. Decorre que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde os coeficientes são dados por

$$b_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)$$

EXEMPLO 1 (visto em aula)

Considere-se a função definida em meio intervalo **f(x)=x, se 0<x<2, , ou seja, definida no intervalo [0,L].**

A função será expandida em série de Fourier seno, completando-a em [-L,0] de modo que seja ímpar em [-L,L], o período fundamental.

Lembre: deseja-se obter a série Fourier seno da função.

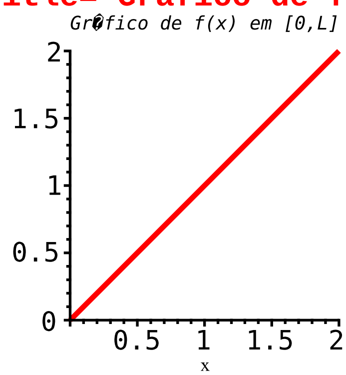
```
> restart:with(plots):with(plottools):assume(n,integer):interface
  (showassumed=0):
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> f(x):=x;L:=2;
```

$$f(x) := x \tag{2.1}$$

$$L := 2$$

```
> plot(f(x),x=0..L,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`Gráfico de f(x) em [0,L]`);
```

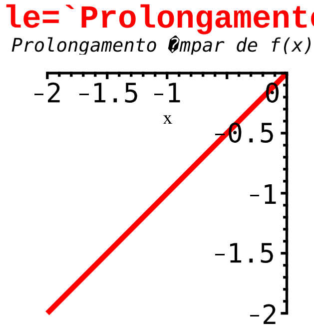


O prolongamento desta função no intervalo (-L,0) é dado por:

```
> g(x):=x;
```

$$g(x) := x \tag{2.2}$$

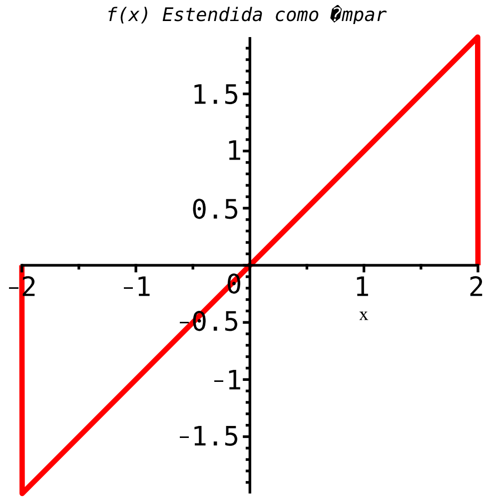
```
> plot(g(x),x=-L..0,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`Prolongamento Ímpar de f(x) `);
```



Agora, a função ímpar no intervalo (-L,L) , periódica, a função dente de serra:

```
> f_imp(x):=piecewise(-L<x and x<0, g(x), 0<x and x<L,f(x)):
```

```
> plot(f_imp(x),x=-L..L,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`f(x) Estendida como Ímpar `);
```



Há duas maneiras de calcular os coeficientes bn:
1º) Com o completamento ímpar, sobre o intervalo [-L 0], calcular o coeficiente de Fourier b_n da função estendida sobre o intervalo [-L L] de comprimento 2L com a fórmula dada no arquivo Fourier1. Observe que os dois processos fornecem o mesmo resultado! Método1:(f_imp(t) é a função estendida)
.

2º) Utilizar a fórmula para os b_n da série Fourier-seno, dada acima.(este é um procedimento mais rápido, caso tenhamos que calcular os coeficientes manualmente).
Primeiramente, vamos calcular os coeficientes como no CASO I, visto em aula $b_n = B_n$

```
> B[n]:=(1/L)*int(f_imp(x)*sin(n*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$B_{n\sim} := -\frac{4\,(-1)^{n\sim}}{n\sim\,\pi} \tag{2.3}$$

Agora, para conferir o resultado obtido, o cálculo será efetuado segundo o **método 2**, isto é, utilizando a fórmula dada acima (o dobro da integral, em [0,L]) para os b_n:

```
> b[n]:=(2/L)*int(f(x)*sin(n*Pi*x/L),x=0..L);
```

$$b_{n\sim} := -\frac{4\,(-1)^{n\sim}}{n\sim\,\pi} \tag{2.4}$$

A série Fourier da função é

```
> serie_f(x):=Sum(b[n]*sin(2*n*Pi/L*x),n=1..infinity);
```

$$serie\_f(x) := \sum_{n\sim=1}^{\infty}\left(-\frac{4\,(-1)^{n\sim}\sin(n\sim\,\pi\,x)}{n\sim\,\pi}\right) \tag{2.5}$$

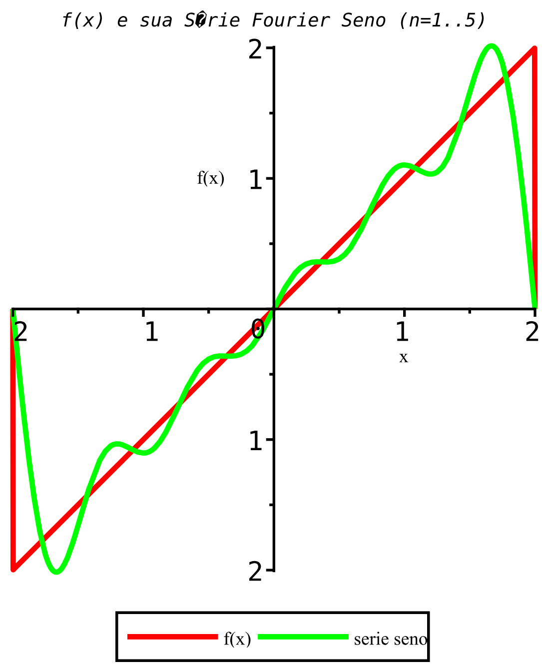
Agora vamos proximar a função f(x) com a soma parcial dos termos S_5, série truncada com n=1..5, e traçar o gráfico da função e de sua aproximação(série truncada) de Fourier

```
> f_ap5(x):=sum(b[n]*sin(n*Pi*x/L),n=1..5);
```

$$f\_ap5(x) := \frac{4\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi} - \frac{2\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{4}{3}\,\frac{\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)}{\pi} - \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} \tag{2.6}$$

$$+ \frac{4}{5} \, \frac{\sin\left(\frac{5 \pi x}{2}\right)}{\pi}$$

```
> plot([f_imp(x),f_ap5(x)],x=-L..L,scaling=constrained,legend=["f
(x)", "serie seno"],thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],
labels=["x", "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
[COURIER,DEFAULT,16], title=`f(x) e sua Série Fourier Seno (n=1.
.5)` );
```



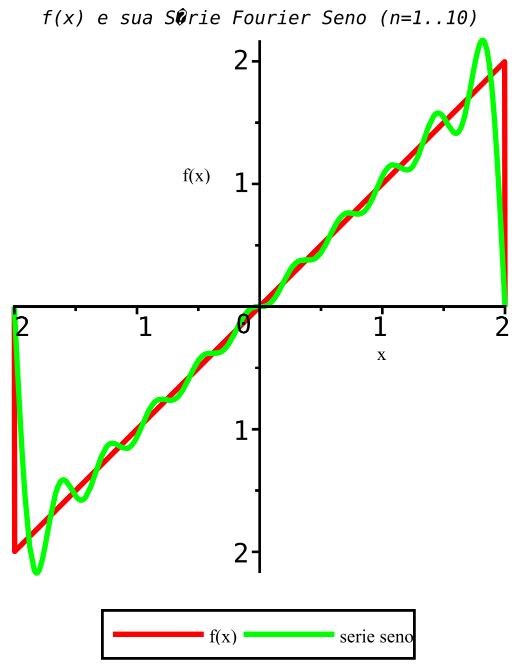
Para uma melhor aproximação vamos calcular a soma parcial dos termosS_{10}, série truncada com n=1. .10 , e traçar o gráfico da função e de sua aproximação(série truncada) de Fourier

```
> f_ap10(x):=sum(b[n]*sin(n*Pi*x/(L)),n=1..10);
```

$$f\_ap10(x) := \frac{4 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{2 \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{4}{3} \, \frac{\sin\left(\frac{3 \pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{\sin(2 \pi x)}{\pi}$$
$$+ \frac{4}{5} \, \frac{\sin\left(\frac{5 \pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{2}{3} \, \frac{\sin(3 \pi x)}{\pi} + \frac{4}{7} \, \frac{\sin\left(\frac{7 \pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{1}{2} \, \frac{\sin(4 \pi x)}{\pi}$$
$$+ \frac{4}{9} \, \frac{\sin\left(\frac{9 \pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{2}{5} \, \frac{\sin(5 \pi x)}{\pi} \qquad \textbf{(2.7)}$$

```
> plot([f_imp(x),f_ap10(x)],x=-L..L,scaling=constrained,legend=["f
(x)", "serie seno"],thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],
labels=["x", "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
```

```
[COURIER,DEFAULT,16], title=`f(x) e sua Série Fourier Seno (n=1..10)` );
```



Com S_{15},

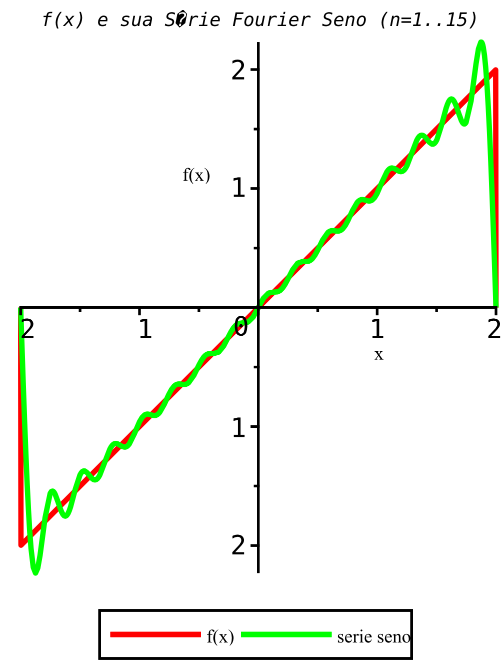
```
> f_ap15(x):=sum(b[n]*sin(n*Pi*x/L),n=1..15);
> plot([f_imp(x),f_ap15(x)],x=-L..L,scaling=constrained,legend=["f(x)", "serie seno"],thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["x", "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,16], title=`f(x) e sua Série Fourier Seno (n=1..15)` );
```

$$f\_ap15(x) := \frac{4\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{2\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{4}{3}\,\frac{\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} + \frac{4}{5}\,\frac{\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)}{\pi}$$

$$\frac{2}{3}\,\frac{\sin(3\pi x)}{\pi} + \frac{4}{7}\,\frac{\sin\left(\frac{7\pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{1}{2}\,\frac{\sin(4\pi x)}{\pi} + \frac{4}{9}\,\frac{\sin\left(\frac{9\pi x}{2}\right)}{\pi}$$

$$\frac{2}{5}\,\frac{\sin(5\pi x)}{\pi} + \frac{4}{11}\,\frac{\sin\left(\frac{11\pi x}{2}\right)}{\pi} \quad \frac{1}{3}\,\frac{\sin(6\pi x)}{\pi} + \frac{4}{13}\,\frac{\sin\left(\frac{13\pi x}{2}\right)}{\pi}$$

$$\frac{2}{7}\,\frac{\sin(7\pi x)}{\pi} + \frac{4}{15}\,\frac{\sin\left(\frac{15\pi x}{2}\right)}{\pi}$$



Só para confirmar, vamos calcular o valor dos a[n] no intervalo simétrico [-L,L], lembre que f(x) é ímpar neste intervalo e cos(n*Pi*x/L) é par, a função integrando F(x) que é o produto das duas é uma função ímpar e sua integral em um intervalo simétrico é nula: F ímpar em [-L,L], $\int_{L}^{L} F(x)\,\mathrm{d}x = 0$

```
> a[n]:=(1/L)*int(f_imp(x)*cos(n*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$a_{n\sim} := 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

==

EXTENSÃO PAR

Completa-se a função f(x), no intervalo -L<x<0, como sendo uma função par no período, ou seja, f(-x)= f(x) para -L<x<L. E, após, expande-se em série de Fourier co-seno sobre o intervalo [-L L]. Neste caso, não há necessidade de calcular os coeficientes b_n, pois, sendo a função par em [-L,L], os coeficientes $b_n = 0$, **para n=1,2,3....** Decorre que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)$$

onde os coeficientes a_n, n=1,2,3..., são dados por

$$a_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)\mathrm{d}x\right)$$

e, em particular, para n=0,

$$a_0 = \frac{2}{L}\left(\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Com o mesmo EXEMPLO 1 (visto em aula)

A função definida em meio intervalo **f(x)=x, se 0<x<2, , ou seja, definida no intervalo [0,L].**
A função será expandida em série Fourier, completando-a em [-L,0] como sendo par no intervalo [-L,L].
Deseja-se obter a série Fourier co-seno da função.

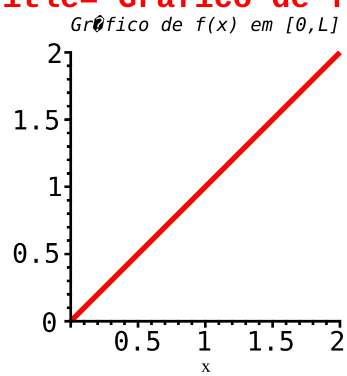
```
> restart:with(plots):with(plottools):assume(n,integer):interface
  (showassumed=0):
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> f(x):=x;L:=2;
```

$$f(x) := x \tag{3.1}$$

$$L := 2$$

```
> plot(f(x),x=0..L,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`Gráfico de f(x) em [0,L]`);
```

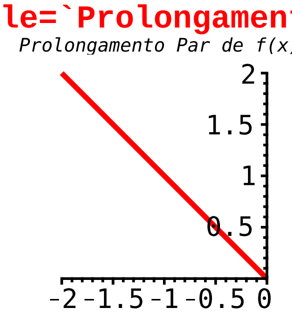


O prolongamento desta função no intervalo (-L,0) é dado por:

```
> h(x):=-x;
```

$$h(x) := -x \tag{3.2}$$

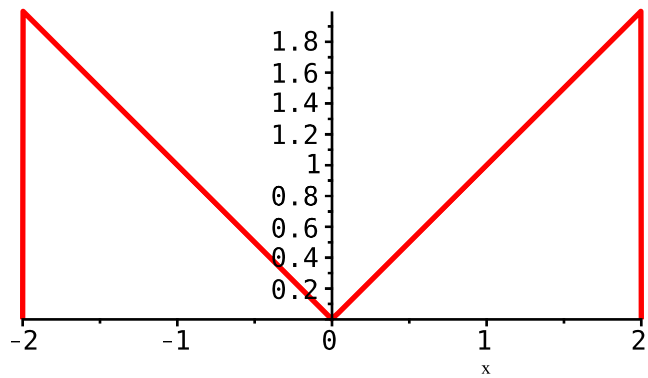
```
> plot(h(x),x=-L..0,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`Prolongamento Par de f(x) `);
```



Agora, a função par no intervalo (-L,L), periódica, a onda triangular:

```
> f_par(x):=piecewise(-L<x and x<0, h(x), 0<x and x<L,f(x)):
> plot(f_par(x),x=-L..L,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
```

```
[COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
[COURIER,DEFAULT,16],title=`f(x)Estendida como Par `);
```



Há duas maneiras de calcular os coeficientes a_n:

1º) Com a extensão par, sobre o intervalo [-L 0], calcular o coeficiente de Fourier a_n e a_0 da função estendida sobre o intervalo [-L L] de comprimento 2L com a fórmula dada no arquivo Fourier1.
Observe que os dois processos fornecem o mesmo resultado! Método1:(f_par(t) é a função estendida) .

2º) Utilizar a fórmula para os a_n e a_0 da série Fourier co-seno, como dada acima, o dobro da integral (este é um procedimento mais rápido, caso tenhamos que calcular os coeficientes manualmente).
Primeiramente, vamos calcular os coeficientes como no CASO I, visto em aula.

```
> A[n]:=(1/L)*int(f_par(x)*cos(n*Pi*x/L),x=-L..L);#para os a[n] = A
  [n] (para não confundir os resultados)
```

$$A_{n\sim} := \frac{4\left(-1+(-1)^{n\sim}\right)}{n\sim^2\,\pi^2} \tag{3.3}$$

Agora, para conferir o resultado obtido, o cálculo será efetuado segundo o **método 2**, isto é, utilizando a fórmula dada acima (o dobro da integral, em [0,L])

```
> a[n]:=(2/L)*int(f(x)*cos(n*Pi*x/L),x=0..L);
```

$$a_{n\sim} := \frac{4\left(-1+(-1)^{n\sim}\right)}{n\sim^2\,\pi^2} \tag{3.4}$$

Analogamente, depois vamos dividir por 2

```
> A[0]:=1/L*int(f_par(x),x=-L..L);
```

$$A_0 := 2 \tag{3.5}$$

ou para a_0, depois vamos dividir por 2

```
> a[0]:=2/L*int(f(x),x=0..L);
```

$$a_0 := 2 \tag{3.6}$$

A série Fourier da função é

```
> serie_f(x):=a[0]/2+Sum(a[n]*cos(n*Pi/L*x),n=1..infinity);
```

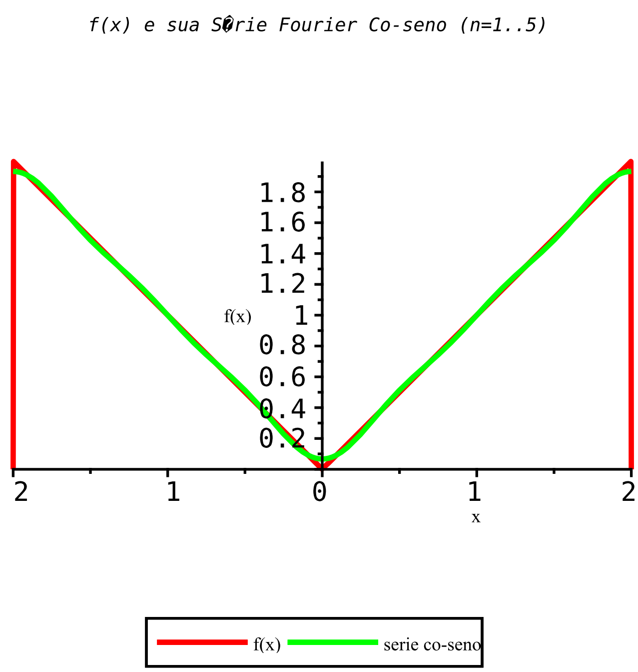
$$serie\_f(x) := 1 + \sum_{n\sim=1}^{\infty} \frac{4\left(-1+(-1)^{n\sim}\right)\cos\left(\frac{n\sim \pi x}{2}\right)}{n\sim^2 \pi^2} \quad (3.7)$$

Agora vamos proximar a função f(x) com a soma parcial dos termosS_5, série truncada com n=0..5 termos, e traçar o gráfico da função e de sua aproximação(série truncada) de Fourier

```
> f_ap5(x):=a[0]/2 + sum(a[n]*cos(n*Pi*x/L),n=1..5);
```

$$f\_ap5(x) := 1 - \frac{8\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi^2} - \frac{8}{9}\frac{\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)}{\pi^2} - \frac{8}{25}\frac{\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)}{\pi^2} \quad (3.8)$$

```
> plot([f_par(x),f_ap5(x)],x=-L..L,scaling=constrained,legend=["f
  (x)", "serie co-seno"],thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,
  12],labels=["x", "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16], title=`f(x) e sua Série Fourier Co-seno (n=
  1..5)` );
```



Só para confirmar, vamos calcular o valor dos b_n no intervalo simétrico [-L,L], lembre que f(x) é par neste intervalo e sen(n*Pi*x/L) é ímpar, a função integrando F(x) que é o produto das duas é uma função ímpar e sua integral em um intervalo simétrico é nula: F ímpar em [-L,L], $\int_{L}^{L} F(x)\, dx = 0$

```
> b[n]:=(1/L)*int(f_par(x)*sin(n*Pi*x/L),x=-L..L);
```

$$b_{n\sim} := 0 \quad (3.9)$$

==

EXTENSÃO PERIÓDICA

Outra maneira possível para a série de Fourier desta função é, simplesmente, considerá-la como periódica. Tem-se o CASO II, arquivo aula2, pois a função está definida como periódica em um intervalo [c,d] qualquer e não em um intervalo simétrico [-L,L]. O período fundamental é T=2, daí, L=1. Mas, neste caso, a série poderia, em geral, conter os termos em seno e co-seno, ou ou o termo em a_0 e os termos em seno (como neste exemplo), pois a função não é par nem é ímpar neste intervalo.

```
> restart:with(plots):with(plottools):assume(n,integer):interface
  (showassumed=0):
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

O período

```
> T :=2;L:=T/2;
```

$$T := 2 \tag{4.1}$$

$$L := 1$$

Dar entrada à função

```
> f:=x->x;
```

$$f := x \rightarrow x \tag{4.2}$$

Gráfico da função dada no intervalo 0< x < 2

```
> plot(f(x),x=0..T,thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,16],
  labels=["x", "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=` f(x)=x, f(x+2)=f(x)`);
```

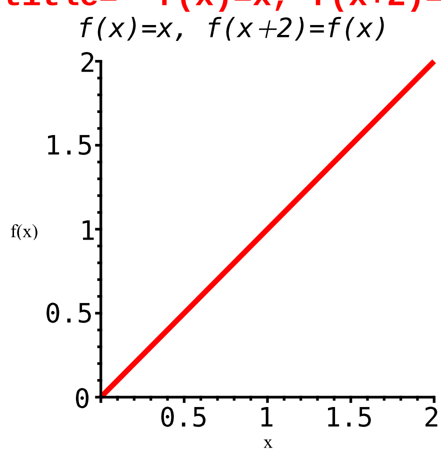
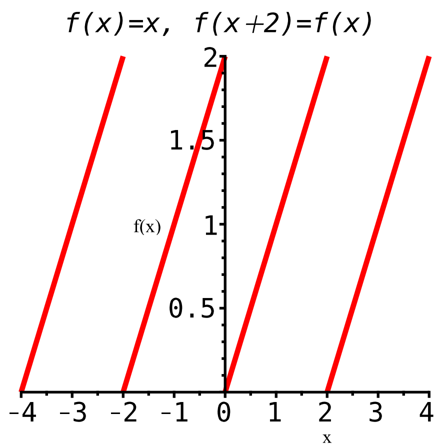


Gráfico do prolongamento periódico da função

```
> h:=proc(x)
                                    if x>0 and x<2 then f(x) elif
                                                              x>2
  then f(x-2) elif
                  x>-2 and x<0 then f(x+2) elif
                                          x>-4 and x<-2 then
```

```
f(x+4)fi end:
```

```
> G:=plot(h,-4..4,thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,16],
  labels=["x", "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],discont=true,
  axesfont=[COURIER,DEFAULT,16],title=`f(x)=x, f(x+2)=f(x)`): G;
```



Cálculo dos coeficientes a_n da série de Fourier, para n =1,2,3,...

Lembrar que **T=2L**, portanto, para o cálculo dos coeficientes, as fórmulas acima serão reescritas de modo adequado.

```
> a[n]:=int(f(x)*cos(2*n*Pi/T*x),x=0..T)/L;
```

$$a_{n\sim} := 0 \qquad \textbf{(4.3)}$$

Cálculo do coeficiente a_0

```
> a[0]:= simplify(int(f(x)/L,x=0..T));
```

$$a_0 := 2 \qquad \textbf{(4.4)}$$

A seguir, os coeficientes b_n, para n=1,2,3,...

```
> b[n]:=int(f(x)*sin(2*n*Pi/T*x),x=0..T)/L;
```

$$b_{n\sim} := -\frac{2}{n\sim\,\pi} \qquad \textbf{(4.5)}$$

A série Fourier da função é

```
> serie_f(x):=a[0]/2+ Sum(a[n]*cos(2*n*Pi/T*x)+b[n]*sin(2*n*Pi/T*
  x),n=1..infinity);
```

$$serie\_f(x) := 1 + \sum_{n\sim=1}^{\infty} \left(-\frac{2\sin(n\sim\,\pi\,x)}{n\sim\,\pi} \right) \qquad \textbf{(4.6)}$$

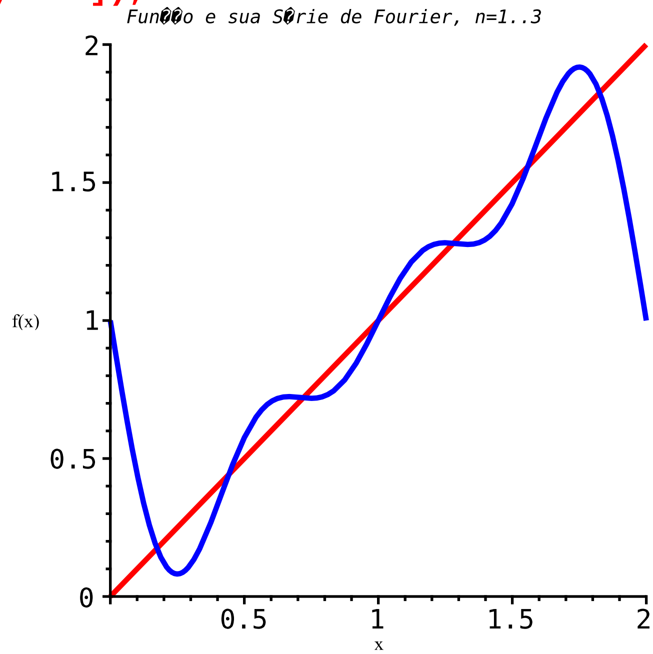
Aproximar a função f(x) com a série truncada até n=3 termos.

```
> f_ap3(x):=a[0]/2+ sum(a[n]*cos(2*n*Pi/T*x)+b[n]*sin(2*n*Pi/T*x),
  n=1..3);
```

$$f\_ap3(x) := 1 - \frac{2\sin(\pi\,x)}{\pi} - \frac{\sin(2\,\pi\,x)}{\pi} - \frac{2}{3}\,\frac{\sin(3\,\pi\,x)}{\pi} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Traçar os gráficos da função dada e da sua aproximação em série de Fourier truncada.

```
> plot({f(x),f_ap3(x)},x=0..T,title=`Função e sua Série de Fourier,
  n=1..3`, thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["x",
  "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,
  16], color=[red,blue]);
```

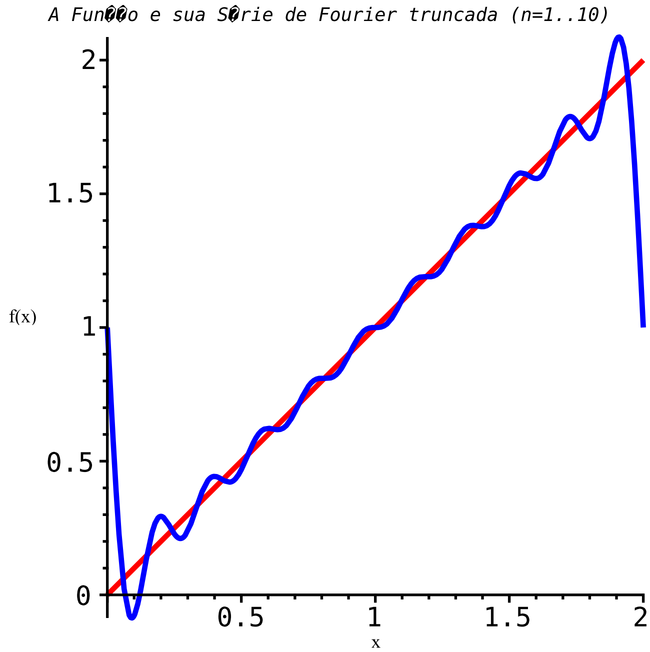


Observe que, na vizinhança da origem, este desenvolvimento em série não é adequado. Os dois anteriores fornecem uma aproximação melhor. Sendo que na extensão ímpar, a convergência é melhor na vizinhança de zero: a função dente de serra é mais suave, é diferenciável (não tem descontinuidade e não tem ponta) na origem. Entretanto, a série de co-senos, obtida com a onda trangular (não é diferenciável na origem-tem uma ponta), mas converge mais rapidamente para a f(x)=x no intervalo 0 a L, ou seja, aproxima melhor globalmente, porque é mais suave é diferenciável ali e é contínua.

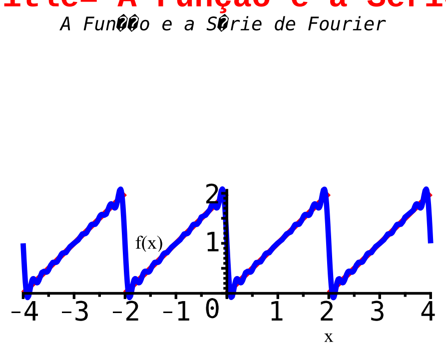
Aumentando o número de termos, por exemplo, para n=1..10 termos

```
> f_ap10(x):=a[0]/2+ sum(a[n]*cos(2*n*Pi/T*x)+b[n]*sin(2*n*Pi/T*x),
  n=1..10);
> plot({f(x),f_ap10(x)},x=0..T,thickness=2, color=[red,blue],
  titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["x", "f(x)"],labelfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,16],title=`A
  Função e sua Série de Fourier truncada (n=1..10)`);
```

$$f\_ap10(x) := 1 - \frac{2\sin(\pi x)}{\pi} - \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} - \frac{2}{3}\frac{\sin(3\pi x)}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\sin(4\pi x)}{\pi} - \frac{2}{5}\frac{\sin(5\pi x)}{\pi} - \frac{1}{3}\frac{\sin(6\pi x)}{\pi} - \frac{2}{7}\frac{\sin(7\pi x)}{\pi} - \frac{1}{4}\frac{\sin(8\pi x)}{\pi} - \frac{2}{9}\frac{\sin(9\pi x)}{\pi} - \frac{1}{5}\frac{\sin(10\pi x)}{\pi}$$




```
> G1:=plot(f_ap10(x),x=-2*T..2*T,thickness=2, color=blue,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],scaling=constrained,labels=["x", "f(x)"],
  labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,16]):
> plots[display](G,G1,title=`A Função e a Série de Fourier`);
```



==
==============================

Outros exemplos EXTENSÃO PAR e EXTENSÃO ÍMPAR

Exemplo:2 Considere-se a função definida em meio intervalo **f(x)=x, se 0<x<L/2, f(x)=L-x, se L/2<x<L, sendo L=2.**

```
> restart:with(plots):with(plottools):assume(n,integer):interface
  (showassumed=0): L:=2;
Warning, the name changecoords has been redefined
```

(5.1)

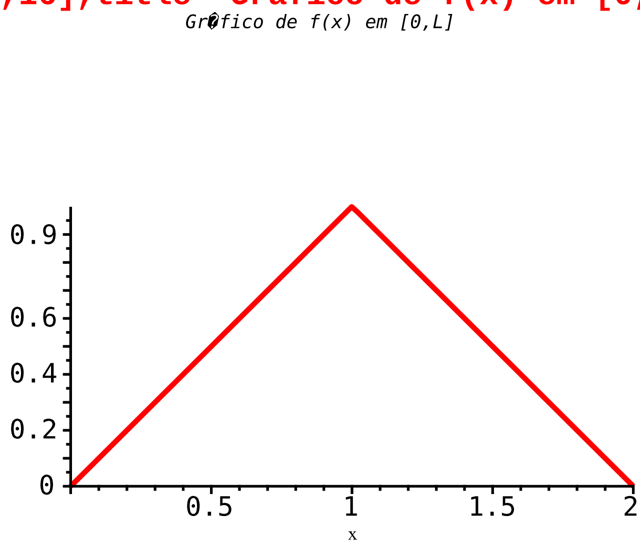
```
Warning, the name arrow has been redefined
```

$$L := 2$$

```
> f(x):=piecewise(0<x and x<L/2,x,L/2<x and x<L,L-x);
```

$$f(x) := \begin{cases} x & -x < 0 \textbf{ and } x < 1 \\ 2 - x & -x < -1 \textbf{ and } x < 2 \end{cases} \tag{5.2}$$

```
> plot(f(x),x=0..L,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`Gráfico de f(x) em [0,L]`);
```

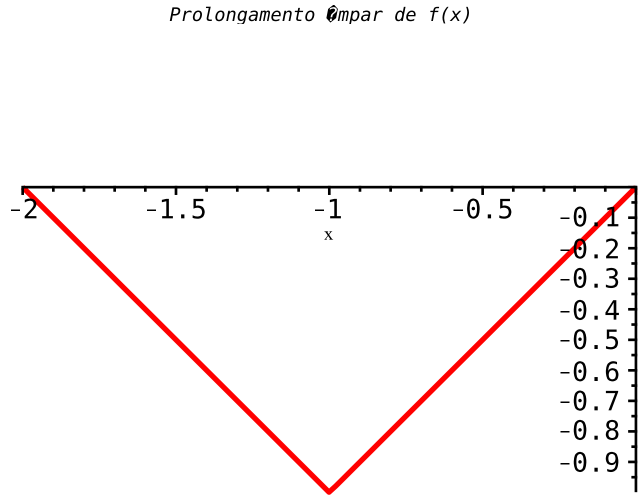


O prolongamento da função no intervalo (-L,0) :

```
> g(x):=piecewise(0>x and x>-L/2,x,-L/2>x and x>-L,-L-x);
```

$$g(x) := \begin{cases} x & x < 0 \textbf{ and } -x < 1 \\ -2 - x & x < -1 \textbf{ and } -x < 2 \end{cases} \tag{5.3}$$

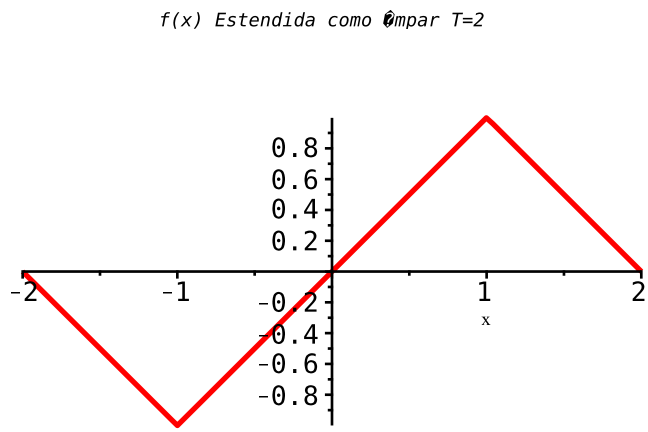
```
> plot(g(x),x=-L..0,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`Prolongamento Ímpar de f(x) `);
```



Agora, a função ímpar no intervalo (-L,L):

```
> f_imp(x):=piecewise(-L<x and x<0, g(x), 0<x and x<L,f(x)):
```

```
> plot(f_imp(x),x=-L..L,scaling=constrained,thickness=2,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`f(x) Estendida como Ímpar T=2 `);
```




```
> b[n]:=(2/L)*int(f(x)*sin(n*Pi*x/L),x=0..L);
```

$$b_{n\sim} := \frac{8 \sin\left(\frac{n\sim \pi}{2}\right)}{n\sim^2 \pi^2} \tag{5.4}$$

A série Fourier da função é

```
> serie_f(x):=Sum(b[n]*sin(n*Pi/L*x),n=1..infinity);
```

(5.5)

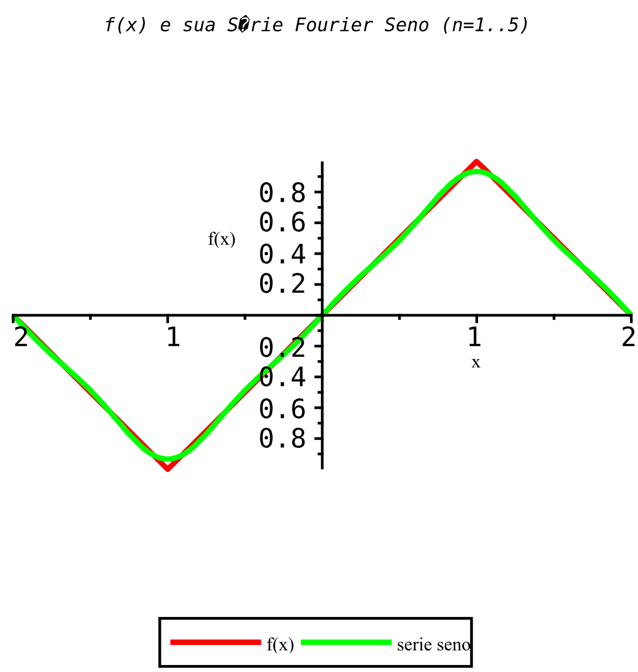
$$serie\_f(x) := \sum_{n\sim=1}^{\infty} \frac{8 \sin\left(\frac{n\sim \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\sim \pi x}{2}\right)}{n\sim^2 \pi^2} \tag{5.5}$$

Aproximar a função f(x) com a soma parcial dos termos S_5 e traçar o gráfico da função e de sua aproximação(série truncada) de Fourier

```
> f_ap5(x):=sum(b[n]*sin(n*Pi*x/L),n=1..5);
```

$$f\_ap5(x) := \frac{8 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi^2} - \frac{8}{9} \frac{\sin\left(\frac{3 \pi x}{2}\right)}{\pi^2} + \frac{8}{25} \frac{\sin\left(\frac{5 \pi x}{2}\right)}{\pi^2} \tag{5.6}$$

```
> plot([f_imp(x),f_ap5(x)],x=-L..L,scaling=constrained,legend=["f(x)", "serie seno"],thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["x", "f(x)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,16], title=`f(x) e sua Série Fourier Seno (n=1..5)` );
```

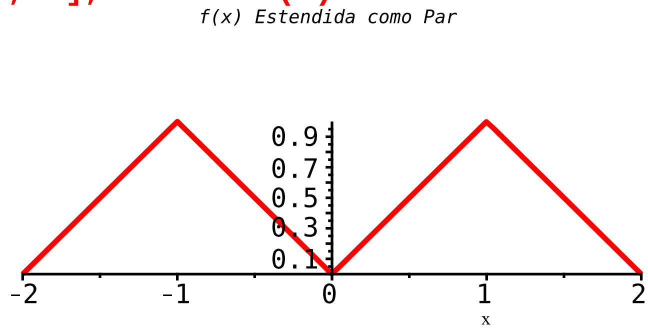


Com o prolongamento da função em [-L,0), de modo que seja par no período : f(-x)=f(x) , -L<x<L e f(x+T)=f(x), obtém-se **Série Fourier Co-seno, bn=0 para todo n,** n=1,2,..

$$a_n = \frac{2}{L} \left(\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \mathrm{d}x \right) \qquad \text{e} \qquad a_o = \frac{2}{L} \left(\int_0^L f(x) \, \mathrm{d}x \right)$$

Construindo o prolongamento da função do exemplo anterior:

```
> f_par(x):=piecewise(-L<x and x<0, -g(x), 0<x and x<L,f(x)):
> plot(f_par(x),x=-L..L,thickness=2,scaling=constrained,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title= `f(x) Estendida como Par`);
```




```
> a[n]:=(2/L)*int(f_par(x)*cos(n*Pi*x/L),x=0..L);
```

$$a_{n\sim} := \frac{4\left(-(-1)^{n\sim} + 2\cos\left(\frac{n\sim\pi}{2}\right) - 1\right)}{n\sim^2\,\pi^2} \quad \textbf{(5.7)}$$

```
> a[0]:=simplify((2/L)*int(f(x),x=0..L));
```

$$a_0 := 1 \quad \textbf{(5.8)}$$

A série Fourier da função é

```
> serie_f(x):=a[0]/2+ Sum(a[n]*cos(n*Pi/L*x),n=1..infinity);
```

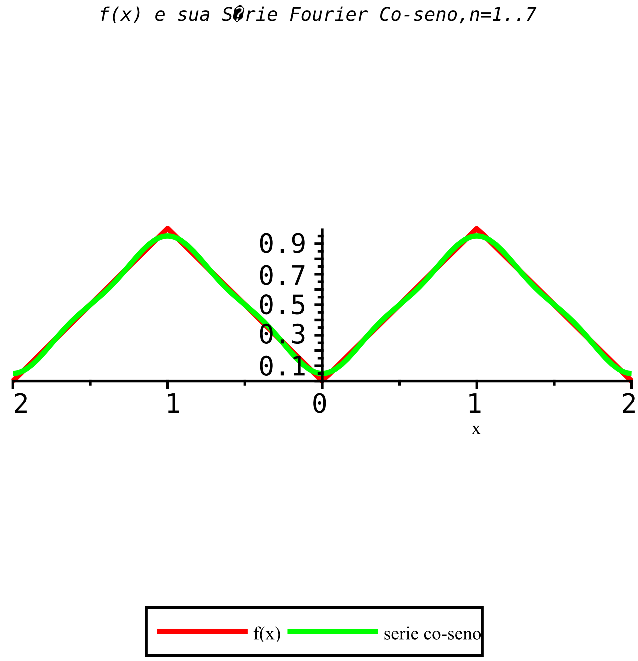
$$serie\_f(x) := \frac{1}{2} + \sum_{n\sim=1}^{\infty} \frac{4\left(-(-1)^{n\sim} + 2\cos\left(\frac{n\sim\pi}{2}\right) - 1\right)\cos\left(\frac{n\sim\pi x}{2}\right)}{n\sim^2\,\pi^2} \quad \textbf{(5.9)}$$

A série aproximada da função f(x) com a série truncada em n=7 é

```
> f_ap7(x):=a[0]/2+ sum(a[n]*cos((n*Pi/L)*x),n=1..7);
```

$$f\_ap7(x) := \frac{1}{2} - \frac{4\cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{4}{9}\,\frac{\cos(3\pi x)}{\pi^2} \quad \textbf{(5.10)}$$

```
> plot([f_par(x),f_ap7(x)],x=-L..L,scaling=constrained,thickness=2,
  titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],
  axesfont=[COURIER,DEFAULT,16],legend=["f(x)", "serie co-seno"],
  title=`f(x) e sua Série Fourier Co-seno,n=1..7`);
```



==

Exemplo 3

1ª Lista-Exercício nº 7- Desenvolva a função f(t)=sen(t), 0<t<π em série Fourier co-seno

```
> restart:with(plots):with(plottools):assume(n,integer);
```

Warning, the name changecoords has been redefined

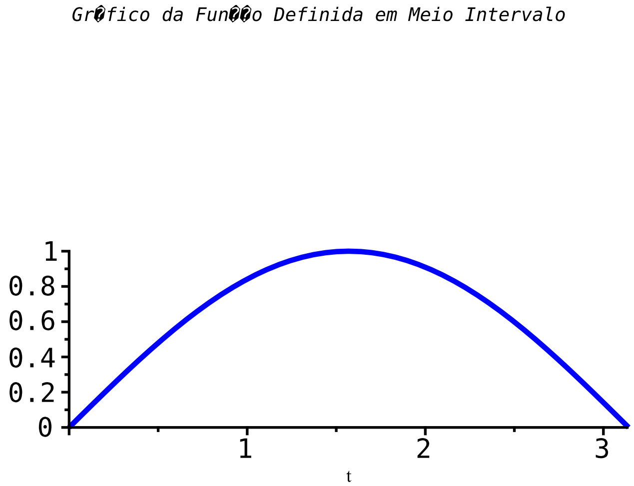
Warning, the name arrow has been redefined

```
> L:=Pi;f(t):=sin(t);
```

$$L := \pi \tag{5.11}$$

$$f(t) := \sin(t)$$

```
> plot(f(t),t=0..Pi,color=blue,scaling=constrained,thickness=2,
  scaling=constrained,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labelfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,16],title=`Gráfico
  da Função Definida em Meio Intervalo`);
```



O completamento desta função no intervalo (-L,0) é dado por:

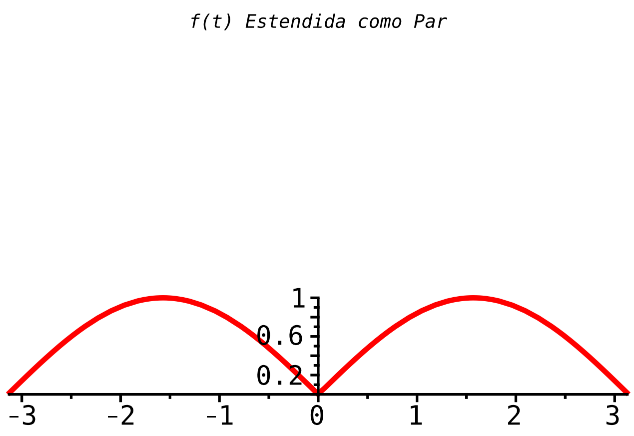
```
> g(t):=sin(-t);
```

$$g(t) := -\sin(t) \tag{5.12}$$

A função par no período [-L,L]

```
> f_par(t):=piecewise(-L<t and t<0, g(t), 0<t and t<L,f(t)):
```

```
> plot(f_par(t),t=-L..L,scaling=constrained,thickness=2,scaling=
  constrained,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,
  DEFAULT,16],axesfont=[COURIER,DEFAULT,16],title= `f(t) Estendida
  como Par`);
```




```
> a[n]:=(2/L)*int(f(t)*cos(n*Pi*t/L),t=0..L);
```

(5.13)

$$a_{n\sim} := -\frac{2\left((-1)^{n\sim}+1\right)}{\pi\,(1+n\sim)\,(-1+n\sim)} \tag{5.13}$$

```
> a[0]:=simplify((2/L)*int(f(t),t=0..L));
```

$$a_0 := \frac{4}{\pi} \tag{5.14}$$

Atenção para este resultado! A série aproximada da função f(t), com a série truncada em n=5, é

```
> f_ap5(t):=(a[0]/2+ sum(a[n]*cos(n*Pi/L*t),n=1..5));
Error, (in sum) numeric exception: division by zero
```

Tem-se divisão por zero: problema com o coeficiente a_1

Calcula-se este coeficiente, em separado, com a fórmula para os a_n com n=1:

```
> a[1]:=(2/L)*int(f(t)*cos(1*Pi*t/L),t=0..L);
```

$$a_1 := 0 \tag{5.15}$$

Agora, como há uma singularidade para n=1, vamos confirmar o valor de b[1]

```
> b[1]:=(1/L)*int(f_par(t)*sin(1*Pi*t/L),t=-L..L);# Tem-se a
  integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico
```

$$b_1 := 0 \tag{5.16}$$

Então, vamos retirar n=1, dos termos da série (não queremos divisão por zero, indeterminação).

```
> f_apf7(t):=(a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*Pi/L*t),n=2..7));#n=1 divisão
  por zero
```

$$f\_apf7(t) := \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3}\,\frac{\cos(2\,t)}{\pi} - \frac{4}{15}\,\frac{\cos(4\,t)}{\pi} - \frac{4}{35}\,\frac{\cos(6\,t)}{\pi} \tag{5.17}$$

```
> plot([f_par(t),f_apf7(t)],t=-L..L,color=[blue,red],thickness=2,
  legend=["f(t)", "serie co-seno"],scaling=constrained,titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labelfont=[COURIER,DEFAULT,16],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,16],title=`f(t) e sua Série Fourier Co-seno, n=
  2..7`);
```

f(t) e sua Série Fourier Co-seno, n=2..7