UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Disciplina: MAT01168 -Matemática Aplicada -Semestre Letivo 2008/2
Professoras: Elisabeta Gallicchio e Irene Strauch
TERCEIRA ÁREA
SÉRIES DE FOURIER UTILIZANDO MAPLE

APLICAÇÃO: CIRCUITO ELÉTRICO RCL SUBMETIDO A UMA FORÇA ELETROMOTRIZ PERIÓDICA

$$\frac{L\,d^2 q}{dt^2} + \frac{R\,dq}{dt} + \frac{1\,q}{C} = E(t),$$

submetido a uma tensão periódica E(t)=E(t+T)
Cálculo da carga permanente

Solução

A resolução do problema será feita em cinco etapas, a saber:
Parte1: a) Cálculo da Série de Fourier da Tensão (input) ; b) A série harmônica (forma compacta) da tensão; c) O espectro de freqüência da tensão.
Parte 2: Substituição da Tensão na EDO.
Parte 3: Solução da EDOLHomogênea associada q_h
Parte 4: Uso do Método dos Coeficientes a Determinar para o cálculo da carga permanente q_p.
Parte 5: Espectro de Amplitude da carga permanente.

Parte1: a) Cálculo da Série de Fourier da Tensão (input).

Reinicializar a memória, carregar os módulos do Maple e estabelecer a resposta em 5 dígitos

```
> restart:with(DEtools):with(plots):with(plottools):Digits:=5;
  assume(n,integer);assume(p,integer);interface(showassumed=0)
  :#Para não exibir n~ e p~
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```
(1.1)

```
Warning, the names arrow and translate have been redefined
```

$$Digits := 5$$

Dar entrada à equação diferencial da carga (será utilizado l minúsculo para denotar a indutância, porque L denotará o semi-período)

```
> edo_carga:=l*diff(q(t),t$2)+R*diff(q(t),t)+(1/C)*q(t)=E(t);
```

(1.2)

$$edo\_carga := l\left(\frac{d^2}{dt^2}\,q(t)\right) + R\left(\frac{d}{dt}\,q(t)\right) + \frac{q(t)}{C} = E(t) \qquad (1.2)$$

Definir o período e a freqüência fundamental

```
> T:=2*Pi; w[1]:=2*Pi/T;L:=T/2;w[n]:=n*w[1];
```

$$T := 2\,\pi \qquad (1.3)$$

$$w_1 := 1$$

$$L := \pi$$

$$w_{n\sim} := n\sim$$

Definir a tensão E(t) periódica aplicada

```
> E:=t->200*(Pi^2-t^2);
```

$$E := t \rightarrow 200\,\pi^2 - 200\,t^2 \qquad (1.4)$$

```
> plot(E(t),t=-L..L,thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,14],
  labels=["t","E(t)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,10],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,10],title=`Tensão  Periódica Aplicada`);
```

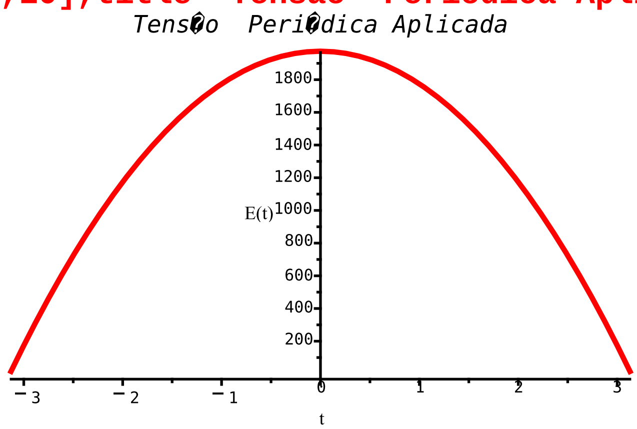
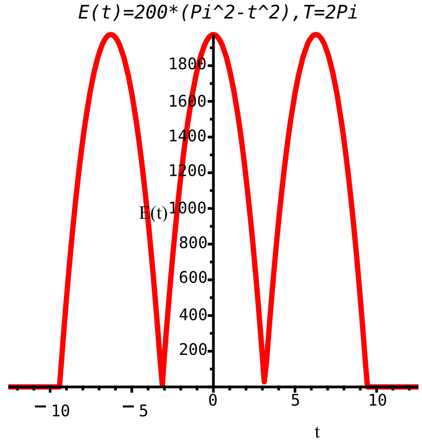


Gráfico do prolongamento periódico da função

```
> h:=proc(t)
                                         if t>-L and t<L then E(t)
  elif
     t>L and t<3*L then E(t-2*L) elif
                                                             t>-3*L
  and t<-L then E(t+2*L) fi
                          end:
> G:=plot(h,-4*L..4*L,thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],
  labels=["t", "E(t)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,10],axesfont=
  [COURIER,DEFAULT,10],title=` E(t)=200*(Pi^2-t^2),T=2Pi`): G;
```



Desenvolver em série de Fourier a tensão, E(t), definida no intervalo (-L,L),T=2L, **f(t+T) = f(t)**

A função dada acima é par, então será desenvolvida (CASO I ou CASO III) em uma **série Fourier co-seno, pois bn=0 para todo n, n=1,2,..**
Vamos utilizar os coeficientes do Caso I, para mostrar que os coeficientes $b_n = 0$, pois, a integral no intervalo simétrico tem como função integrando uma funcão impar. Assim, os coeficientes da série de Fourier são dados por

```
> a[0]:=(1/L)*int(E(t),t=-L..L);
```

$$a_0 := \frac{800\,\pi^2}{3} \tag{1.5}$$

```
> a[n]:=simplify((1/L)*int(E(t)*cos(n*Pi*t/L),t=-L..L));
```

$$a_{n\sim} := \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}}{n\sim^2} \tag{1.6}$$

```
> b[n]:=simplify((1/L)*int(E(t)*sin(n*Pi*t/L),t=-L..L));
```

$$b_{n\sim} := 0 \tag{1.7}$$

```
> serie_tensao:=a[0]/2+Sum(a[n]*cos((n*Pi*t/L))+b[n]*sin((n*Pi*t/L)
  ),'n'=1..infinity);
```

$$serie\_tensao := \frac{400\,\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \tag{1.8}$$

A série da tensão E(t), com a série truncada n=1..4 é:

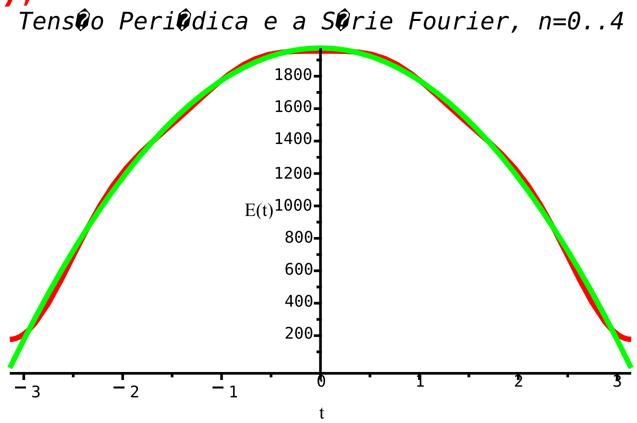
```
> f_ap4(t):=a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*Pi*t/L)+b[n]*sin(n*Pi*t/L),n=1.
  .4);
```

$$f\_ap4(t) := \frac{400\,\pi^2}{3} + 800\cos(t) - 200\cos(2\,t) + \frac{800}{9}\cos(3\,t) - 50\cos(4\,t) \tag{1.9}$$

Os gráficos da tensão E(t) e de sua série de Fourier para n=0,1,2,3,4

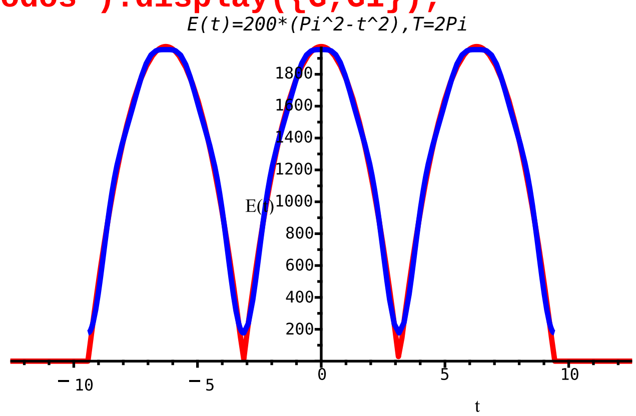
```
> plot({E(t),f_ap4(t)},t=-L..L,thickness=2,titlefont=[COURIER,
```

```
DEFAULT,14],labels=["t","E(t)"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,10],
axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],title=`Tensão Periódica e a Série
Fourier, n=0..4`);
```



O gráfico da tensão e de sua série, aproximada com 4 termos, em três períodos

```
> G1:=plot(f_ap4(t),t=-3*L..3*L,thickness=2,color=blue,titlefont=
[COURIER,DEFAULT,12],labels=["t", "E(t)"],labelfont=[COURIER,
DEFAULT,10],axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],title=` E(t) e a Série
Fourie em 3 Períodos`):display({G,G1});
```



Parte1: **b) Forma compacta da série da tensão** . Serão calculadas a **amplitude** e a **fase,** utilizando o n-ésimo termo

A freqüência fundamental é $w_1 := 1$ e, assim, $w_{n\sim} := n\sim$. O n-ésimo termo é dado por

```
> n_termo:=a[n]*cos(n*w[1]*t)+b[n]*sin(n*w[1]*t); A[0]:=a[0]/2;
```

$$n\_termo := \frac{800\ (-1)^{1+n\sim} \cos(n\sim t)}{n\sim^2} \tag{1.10}$$

$$A_0 := \frac{400\ \pi^2}{3}$$

A n-ésima amplitude da série da tensão é

```
> amplit_tensao:=root[2](a[n]^2+b[n]^2);
```

$$amplit\_tensao := \frac{800\sqrt{\left((-1)^{1+n\sim}\right)^2}}{n\sim^2} \tag{1.11}$$

e, simplificando, a n-ésima amplitude da série da tensão é

```
> ampli[n]:=radsimp(amplit_tensao);
```

$$ampli_{n\sim} := \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}}{n\sim^2} \tag{1.12}$$

```
> if b[n]=0 then Phi[n]:=Pi/2 else Phi[n]:=arctan(a[n]/b[n]) end
  if;
```

$$\Phi_{n\sim} := \frac{\pi}{2} \tag{1.13}$$

```
> tensão_compacta:=a[0]/2+Sum(ampli[n]*sin(w[n]*t+Phi[n]),n=1..
  infinity);
```

$$tens\Box o\_compacta := \frac{400\,\pi^2}{3} + \sum_{n\sim=1}^{\infty} \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \tag{1.14}$$

ou, de forma equivalente -veja que no Maple ter-se-á o mesmo resultado, para a forma compacta, pois cos(A(+/-)Pi/2)= (-/+) sin(a)-

```
> if a[n]=0 then theta[n]:=Pi/2 else theta[n]:=arctan(b[n]/a[n])
  end if;
```

$$\theta_{n\sim} := 0 \tag{1.15}$$

```
> tens_compac:=A[0]+Sum(ampli[n]*cos(w[n]*t-theta[n]), n=1..
  infinity);
```

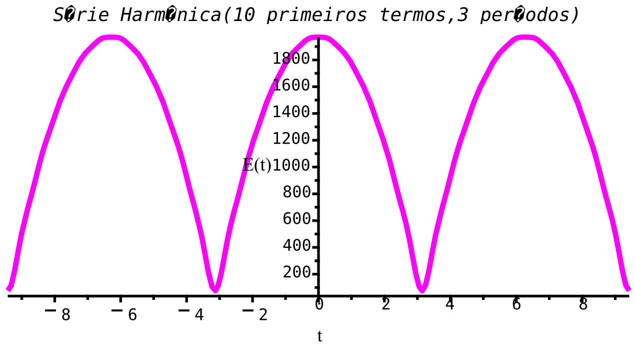
$$tens\_compac := \frac{400\,\pi^2}{3} + \sum_{n\sim=1}^{\infty} \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \tag{1.16}$$

A série com n=1..10

```
> tens_compac:= A[0]+sum(ampli[n]*cos(w[n]*t-theta[n]), n=1..10);
```

$$tens\_compac := \frac{400\,\pi^2}{3} + 800\cos(t) - 200\cos(2\,t) + \frac{800}{9}\cos(3\,t) - 50\cos(4\,t) + 32\cos(5\,t) - \frac{200}{9}\cos(6\,t) + \frac{800}{49}\cos(7\,t) - \frac{25}{2}\cos(8\,t) + \frac{800}{81}\cos(9\,t) - 8\cos(10\,t) \tag{1.17}$$

```
> G2:=plot(tens_compac, t=-3*L..3*L,color=magenta,thickness=2,
  titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["t", "E(t)"],labelfont=
  [COURIER,DEFAULT,10],axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],title=`Série
  Harmônica(10 primeiros termos,3 períodos)`):G2;
```



Parte1: **c) O espectro de freqüência da tensão.**

Cálculo das amplitudes (EM MÓDULO), para o espectro de freqüência correspondente à série da tensão:

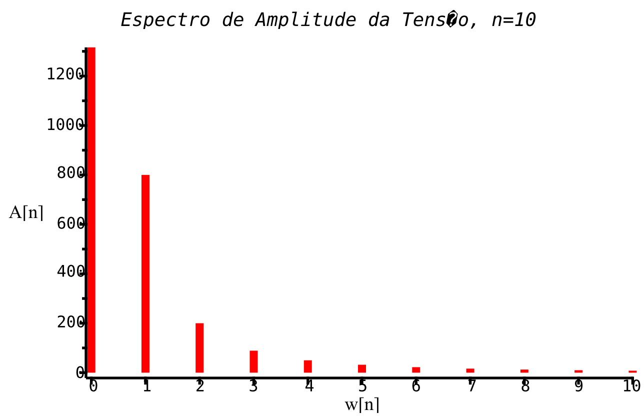
```
> for i from 1 to 10 do A[i]:=evalf(abs(subs(n=i,ampli[n]))):  w[i]
  :=subs(n=i,w[n]):od:
> for k from 1 to 10 do lprint(frequencia[k]=w[k],amplitude[k]=A[k]
  ):od;
frequencia[1] = 1, amplitude[1] = 800.
frequencia[2] = 2, amplitude[2] = 200.
frequencia[3] = 3, amplitude[3] = 88.889
frequencia[4] = 4, amplitude[4] = 50.
frequencia[5] = 5, amplitude[5] = 32.
frequencia[6] = 6, amplitude[6] = 22.222
frequencia[7] = 7, amplitude[7] = 16.327
frequencia[8] = 8, amplitude[8] = 12.500
frequencia[9] = 9, amplitude[9] = 9.8765
frequencia[10] = 10, amplitude[10] = 8.
```

Para o espectro da freqüência, vamos definir w[0]=0 para a amplitude $A_0 := 1315.9$

```
> A[0]:=evalf(400/3*Pi^2);
```

$$A_0 := 1315.9 \tag{1.18}$$

```
> w[0]:=0:
>  for i from 0 to 10 do g[i]:=line([w[i],0],[w[i],A[i]], color=
  red, thickness=3):od:
> G3:=plots[display]({g[0],g[1],g[2],g[3],g[4],g[5],g[6],g[6],g[7],
  g[8],g[9],g[10]},xtickmarks=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],titlefont=
  [COURIER,DEFAULT,12],labels=["w[n]","A[n]"],labelfont=[COURIER,
  DEFAULT,10],axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],title=`Espectro de
  Amplitude da Tensão, n=10`,axes=frame):G3;
```



Parte 2: Substituição da Tensão E(t) na EDO. Agora, deve-se determinar a saída do sistema submetido à tensão periódica (dada acima). Para tanto, considere-se a[0]/2 e o termo geral. Inserindo os dados do ploblema Indutância: l=10 henry, Resistência R=100 ohm: Capacitância: C=$\frac{1}{10^2}$, tem-se

```
> Dados:=([l=10,R=100,C=10^(-2),E(t)=serie_tensao]);
```

$$Dados := \left[l=10,\ R=100,\ C=\frac{1}{100},\ 200\,\pi^2-200\,t^2=\frac{400\,\pi^2}{3}+\sum_{n\sim=1}^{\infty}\frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \right] \tag{1.19}$$

A EDO do circuito , para a carga, com a tensão aproximada pela série de Fourier, torna-se

```
> edcirc:=subs(Dados,edo_carga);
```

$$edcirc := 10\left(\frac{d^2}{dt^2}q(t)\right)+100\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)+100\,q(t)=\frac{400\,\pi^2}{3}+\sum_{n\sim=1}^{\infty}\frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \tag{1.20}$$

Parte 3: Solução da EDOLHomogênea associada q_h

A EDLHomogênea associada

```
> edcirc_hom:=lhs(edcirc)=0;
```

$$edcirc\_hom := 10\left(\frac{d^2}{dt^2}q(t)\right)+100\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)+100\,q(t)=0 \tag{1.21}$$

O conjunto fundamental de soluções

```
> base:=dsolve(edcirc_hom,output=basis);
```

$$base := \left[e^{\left(-5+\sqrt{15}\right)t},\ e^{-\left(5+\sqrt{15}\right)t}\right] \tag{1.22}$$

A solução geral da EDOLH é a combinação linear dos elementos da base

```
> qh:=dsolve(edcirc_hom);
```

$$qh := q(t) = \_C1\, e^{\left(-5+\sqrt{15}\right)t} + \_C2\, e^{-\left(5+\sqrt{15}\right)t} \tag{1.23}$$

Parte 4: Cálculo da carga permanente q_p

Para resolver a EDOLNH será usado o Método dos Coeficientes a Determinar considerando **a**[0]/2 e, após, o termo geral a[n], n=1,2,3..N (série finita).

Não é necessário aplicar o fator de correção, pois as soluções da equação homogênea associada ,qh, e a solução da equação não homogênea,qp, não possuem termos em comum.
Assim, supondo qp=constante, para o cálculo da solução correspondente ao termo **a**[0]/2, vem

```
> sup_qp0:=Cte;
```

$$sup\_qp0 := Cte \tag{1.24}$$

```
> edcirc0:=lhs(edcirc)=a[0]/2; #primeiro termo da série de Fourier
```

$$edcirc0 := 10\left(\frac{d^2}{dt^2}\, q(t)\right) + 100\left(\frac{d}{dt}\, q(t)\right) + 100\, q(t) = \frac{400\,\pi^2}{3} \tag{1.25}$$

```
> qp0:=solve(simplify(subs(q(t)=sup_qp0,edcirc0)),Cte);
```

$$qp0 := \frac{4\,\pi^2}{3} \tag{1.26}$$

Para as outras soluções, com o termo geral a[n] e b[n] (embora b[n]=0, este foi colocado, para ter a fórmula completa, tendo em vista outros problemas)

```
> edcirc_nhom:=lhs(edcirc)=Sum(a[n]*cos(n*Pi*t/L)+b[n]*sin(n*Pi*
  t/L),n=1..infinity);
```

$$edcirc\_nhom := 10\left(\frac{d^2}{dt^2}\, q(t)\right) + 100\left(\frac{d}{dt}\, q(t)\right) + 100\, q(t) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \tag{1.27}$$

ou, com o termo geral da tensão

```
> edcirc_nhom:=lhs(edcirc)=n_termo;
```

$$edcirc\_nhom := 10\left(\frac{d^2}{dt^2}\, q(t)\right) + 100\left(\frac{d}{dt}\, q(t)\right) + 100\, q(t) = \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \tag{1.28}$$

Como não é necessário o fator de correção (qh e qp não possuem termos em comum), considera-se

```
> sup_sol:=Ap*cos(p*t)+Bp*sin(p*t);
```

$$sup\_sol := Ap\cos(p\sim t) + Bp\sin(p\sim t) \tag{1.29}$$

Substituindo a suposta solução na E.D.

```
> calculo_coef:=radsimp(combine(subs(q(t)=sup_sol,edcirc_nhom),
  trig));
```

$$calculo\_coef := -10\, Ap\cos(p\sim t)\, p\sim^2 - 10\, Bp\sin(p\sim t)\, p\sim^2 - 100\, Ap\sin(p\sim t)\, p\sim + 100\, Bp\cos(p\sim t)\, p\sim + 100\, Ap\cos(p\sim t) + 100\, Bp\sin(p\sim t) \tag{1.30}$$

$$= \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2}$$

Agrupando os termos semelhantes

```
> agrup:=collect(calculo_coef,{cos(p*t),sin(p*t)});nops(lhs(agrup))
  ;
```

$$agrup := \left(-10\,Ap\,p\sim^2 + 100\,Bp\,p\sim + 100\,Ap\right)\cos(p\sim t) + \left(-10\,Bp\,p\sim^2 - 100\,Ap\,p\sim + 100\,Bp\right)\sin(p\sim t) = \frac{800\,(-1)^{1+n\sim}\cos(n\sim t)}{n\sim^2} \quad \textbf{(1.31)}$$

$$2$$

```
> A:=(op(1,lhs(agrup)));B:=(op(2,lhs(agrup)));
```

$$A := \left(-10\,Ap\,p\sim^2 + 100\,Bp\,p\sim + 100\,Ap\right)\cos(p\sim t) \quad \textbf{(1.32)}$$

$$B := \left(-10\,Bp\,p\sim^2 - 100\,Ap\,p\sim + 100\,Bp\right)\sin(p\sim t)$$

Atenção! Deve-se conferir os coeficientes do co-seno e do seno, acima. Se a resposta não estiver correta, rodar novamente o programa ou trocar A e B, abaixo.
Nos cálculos, a seguir, deve-se tomar **cuidado com a ordem** dos coeficientes An e Bn fornecidos pelo **Maple**

```
> coef_cos:=coeffs(A,cos(p*t));coef_sen:=coeffs(B,sin(p*t));
```

$$coef\_cos := -10\,Ap\,p\sim^2 + 100\,Bp\,p\sim + 100\,Ap \quad \textbf{(1.33)}$$

$$coef\_sen := -10\,Bp\,p\sim^2 - 100\,Ap\,p\sim + 100\,Bp$$

Os coeficientes An e Bn são determinados resolvendo o sistema algébrico:

```
> coefp:=(solve({coef_sen=subs(n=p,b[n]), coef_cos=subs(n=p,a[n])},
  {Ap,Bp}));
```

$$coefp := \left\{ Bp = \frac{800\,(-1)^{1+p\sim}}{p\sim\left(80\,p\sim^2 + p\sim^4 + 100\right)},\ Ap = -\frac{80\left(p\sim^2 - 10\right)(-1)^{1+p\sim}}{p\sim^2\left(80\,p\sim^2 + p\sim^4 + 100\right)} \right\} \quad \textbf{(1.34)}$$

```
> qp:=subs(coefp,sup_sol);
```

$$qp := -\frac{80\left(p\sim^2 - 10\right)(-1)^{1+p\sim}\cos(p\sim t)}{p\sim^2\left(80\,p\sim^2 + p\sim^4 + 100\right)} + \frac{800\,(-1)^{1+p\sim}\sin(p\sim t)}{p\sim\left(80\,p\sim^2 + p\sim^4 + 100\right)} \quad \textbf{(1.35)}$$

```
> Amplitp:=simplify(sqrt(coeff(qp,cos(p*t))^2+coeff(qp,sin(p*t))^2)
  );
```

$$Amplitp := \frac{80}{p\sim^2\sqrt{80\,p\sim^2 + p\sim^4 + 100}} \quad \textbf{(1.36)}$$

```
> if coeff(qp,cos(p*t))=0 then fasep:=Pi/2 else fasep:=simplify
  (arctan(coeff(qp,sin(p*t))/(coeff(qp,cos(p*t)))))end if;
```

$$fasep := -\arctan\left(\frac{10\,p\sim}{p\sim^2 - 10}\right) \quad \textbf{(1.37)}$$

Aqui, na resposta do sistema na forma compacta, deve-se acrescentar a fase do primeiro termo a[0]/2 que é Pi/2 (caso contrário, os gráficos aparecem defasados de Pi/2, quando comparados)! Elimine este termo(na linha seguinte) e observe o gráfico comparativo no final do problema.

A forma compacta da p-ésima solução é dada por

```
> comp_qp:=Amplitp*cos(p*t-fasep+theta[n]);
```

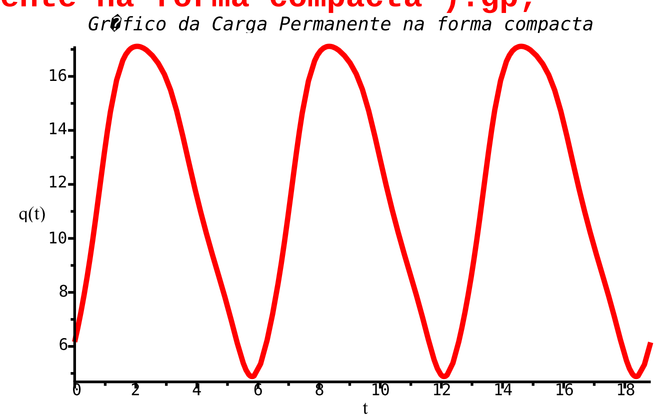
$$comp\_qp := \frac{80\cos\left(p\sim t+\arctan\left(\frac{10\,p\sim}{p\sim^2-10}\right)\right)}{p\sim^2\sqrt{80\,p\sim^2+p\sim^4+100}} \qquad \mathbf{(1.38)}$$

Para n=0..6

```
> comp_qp6:=qp0-Pi/2+sum(Amplitp*cos(p*t-fasep-Phi[n] ),p=1..6)
  :carga_compacta:=evalf(comp_qp6);
```

$$carga\_compacta := 11.588+5.9465\sin(t-0.83798)+0.95785\sin(2.\,t-1.2793)+0.29614\sin(3.\,t-1.5375)+0.12361\sin(4.\,t+1.4219)+0.061301\sin(5.\,t+1.2793)+0.033984\sin(6.\,t+1.1619) \qquad \mathbf{(1.39)}$$

```
> gp:=plot(carga_compacta,t=0..6*Pi,color=red,thickness=2,
  titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["t", "q(t)"],labelfont=
  [COURIER,DEFAULT,10],axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],title=`Gráfico
  da Carga Permanente na forma compacta`):gp;
```



Parase obter diretamente a forma compacta das soluções: q1, q2, q3, q4, q5, q6, q7, q8, q9 e q10

```
> for i from 1 to 10 do q[i]:=evalf(subs(p=i,comp_qp)):od:for k
  from 1 to 10 do lprint(solucao[k]=q[k]):od;
solucao[1] = 5.9465*cos(t-.83798)
solucao[2] = .95785*cos(2.*t-1.2793)
solucao[3] = .29614*cos(3.*t-1.5375)
solucao[4] = .12361*cos(4.*t+1.4219)
solucao[5] = .61301e-1*cos(5.*t+1.2793)
solucao[6] = .33984e-1*cos(6.*t+1.1619)
solucao[7] = .20375e-1*cos(7.*t+1.0625)
solucao[8] = .12951e-1*cos(8.*t+.97705)
solucao[9] = .86154e-2*cos(9.*t+.90287)
solucao[10] = .59465e-2*cos(10.*t+.83798)
```

Outra maneira

Para a solução 1

```
> q1:=evalf(subs(p=1,qp));
```

$$q1 := 3.9779\cos(t) + 4.4199\sin(t) \tag{1.40}$$

Amplitude 1

```
> Amplit1:=evalf(subs((p=1),Amplitp));evalf(sqrt(3.98^2+4.42^2));
```

$$Amplit1 := 5.9465 \tag{1.41}$$

$$5.9478$$

Fase 1

```
> fase1:=evalf(subs(p=1,fasep));
```

$$fase1 := 0.83798 \tag{1.42}$$

Para a solução 2

```
> q2:=evalf(subs(p=2,qp));
```

$$q2 := -0.27523\cos(2.\,t) - 0.91743\sin(2.\,t) \tag{1.43}$$

```
> Amplit2:=evalf(subs((p=2),Amplitp));
```

$$Amplit2 := 0.95785 \tag{1.44}$$

Fase 1

```
> fase2:=evalf(subs(p=2,fasep));
```

$$fase2 := 1.2793 \tag{1.45}$$

Para a q3

```
> q3:=evalf(subs(p=3,qp));
```

$$q3 := 0.0098656\cos(3.\,t) + 0.29597\sin(3.\,t) \tag{1.46}$$

Forma compacta da solução q3

```
> Amplit3:=evalf(subs((p=3),Amplitp));
```

$$Amplit3 := 0.29614 \tag{1.47}$$

Fase 3

```
> fase3:=evalf(subs(p=3,fasep));
```

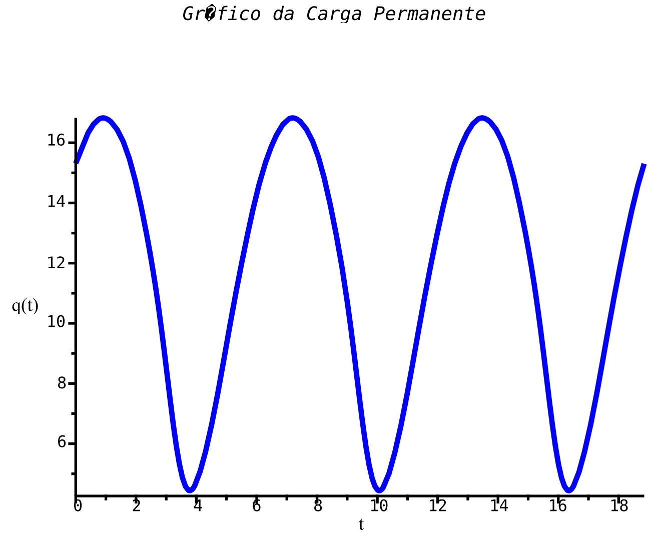
$$fase3 := 1.5375 \tag{1.48}$$

```
> q4:=evalf(subs(p=4,qp)):q5:=evalf(subs(p=5,qp)):q6:=evalf(subs(p=
  6,qp)):
```

A carga permanente é dada por

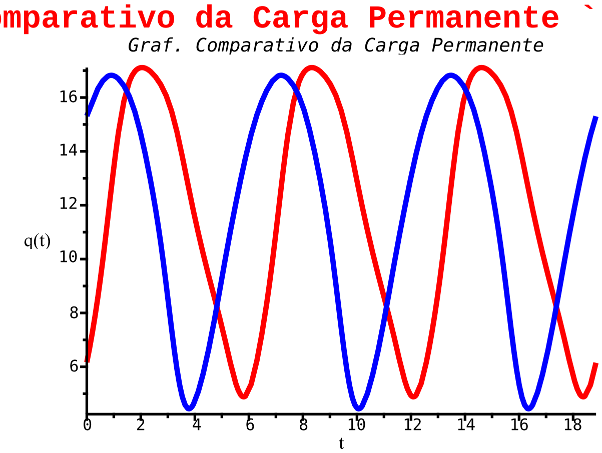
```
> carga_permanente:=evalf(qp0-Pi/2+q1+q2+q3+q4+q5+q6);g4:=plot
  (carga_permanente,t=0..6*Pi,scaling=constrained,color=blue,
  thickness=2,titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["t", "q(t)"],
  labelfont=[COURIER,DEFAULT,10],axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],
  title=`Gráfico da Carga Permanente`):g4;
```

$carga\_permanente := 11.588 + 3.9779\cos(t) + 4.4199\sin(t) - 0.27523\cos(2.\,t) - 0.91743\sin(2.\,t) + 0.0098656\cos(3.\,t) + 0.29597\sin(3.\,t) + 0.018337\cos(4.\,t) - 0.12225\sin(4.\,t) - 0.017615\cos(5.\,t) + 0.058716\sin(5.\,t) + 0.013512\cos(6.\,t) - 0.031182\sin(6.\,t)$



Para comparar os gráficos da carga permanente: **Estão defasados de Pi/2!!!**

```
> display({g4,gp},titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["t", "q(t)
"],labelfont=[COURIER,DEFAULT,10],axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],
title=`Graf. Comparativo da Carga Permanente `);
```



E a solução geral q=qh+qp com as sete primeiras soluções é

```
> soltotal:=qh+comp_qp6;
Error, (in simpl/relopsum) invalid terms in sum
```

Na seqüência, será considerada apenas a carga permanente, pois a solução da EDOLH associada é transiente e, geralmente, não é considerada neste tipo de problema.

Parte 5: Espectro de Amplitude da carga permanente.

A seguir, as amplitudes serão calculadas (em módulo), para p=1,2,3,4,5,6,7,8.9,10 para comparar os resultados e traçar o espectro de amplitude .

```
> for i from 1 to 10 do A[i]:=evalf(abs(subs(p=i,Amplitp))) :  w[i]
  :=subs(n=i,w[n]):od:
> for m from 1 to 10 do lprint(frequencia[m]=w[m],amplitude[m]=A[m]
  ):od;
frequencia[1] = 1, amplitude[1] = 5.9465
frequencia[2] = 2, amplitude[2] = .95785
frequencia[3] = 3, amplitude[3] = .29614
frequencia[4] = 4, amplitude[4] = .12361
frequencia[5] = 5, amplitude[5] = .61301e-1
frequencia[6] = 6, amplitude[6] = .33984e-1
frequencia[7] = 7, amplitude[7] = .20375e-1
frequencia[8] = 8, amplitude[8] = .12951e-1
frequencia[9] = 9, amplitude[9] = .86154e-2
frequencia[10] = 10, amplitude[10] = .59465e-2
```

Note que a amplitude dominante é a correspondente a p=1. Para p>1, os valores serão muito pequenos.

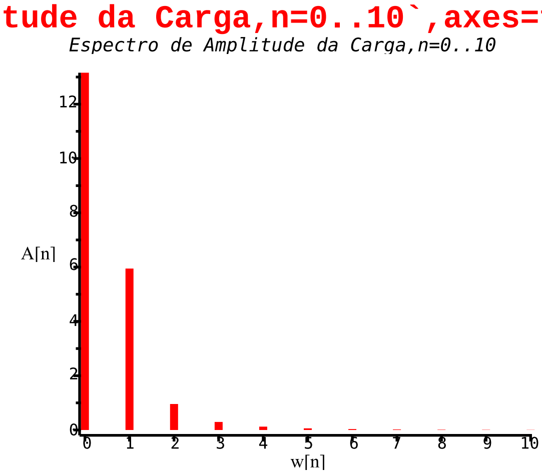
Espectro de amplitude da carga do sistema

```
> qp0;A[0]:=evalf(qp0);gr[0]:=line([0,0],[0,A[0]], color=red,
  thickness=3):
```

$$\frac{4\pi^2}{3} \tag{1.49}$$

$$A_0 := 13.159$$

```
>  for k from 1 to 10 do gr[k]:=line([w[k],0],[w[k],A[k]], color=
  red, thickness=3):od:
> Graf:=plots[display]({gr[0],gr[1],gr[2],gr[3],gr[4],gr[5],gr[6],
  gr[7],gr[8],gr[9],gr[10]},xtickmarks=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],
  titlefont=[COURIER,DEFAULT,12],labels=["w[n]","A[n]"],labelfont=
  [COURIER,DEFAULT,10],axesfont=[COURIER,DEFAULT,10],title=
  `Espectro de Amplitude da Carga,n=0..10`,axes=frame):Graf;
```



A seguir, as amplitudes serão calculadas novamente, para p=1,2,3,4,5 para mais facilmente comparar os resultados.

```
> ap1:=evalf(subs(p=1,Amplitp));ap2:=evalf(subs(p=2,Amplitp));ap3:=
  evalf(subs(p=3,Amplitp));ap4:=evalf(subs(p=4,Amplitp));ap5:=evalf
  (subs(p=5,Amplitp));
```

$$ap1 := 5.9465 \tag{1.50}$$

$$ap2 := 0.95785$$

$$ap3 := 0.29614$$

$$ap4 := 0.12361$$

$$ap5 := 0.061301$$

Note que a amplitude dominante(excluído a[0]) é a correspondente a p=1. Para p>1, os valores serão muito pequenos.

Conclusão: A carga permanente no circuito (qp(t)) é dominada pela carga qp1(t), cuja freqüência é a freqüência fundamental (w=1).

```
> Fator_Ganho:=simplify(subs(Dados, 1/((R^2*n^2+(1/C)^2-2*(1/C)*l*
  n^2+l^2*n^4)^(1/2))));
```

$$Fator\_Ganho := \frac{1}{10\sqrt{80\,n\sim^2 + 100 + n\sim^4}} \tag{1.51}$$

Para verificar se os cálculos estão corretos, o fator de ganho será multiplicado pela amplitude da tensão correspondente a n=1, isto é, pela a amplitude do primeiro termo da tensão. Esta operação deverá resultar a amplitude do primeiro termo da resposta do sistema

```
> amp_max:=evalf((subs(n=1,Fator_Ganho)))*evalf(subs(n=1,sqrt((a[n]
  )^2+(b[n])^2)));
```

$$amp\_max := 5.9466 \tag{1.52}$$

```
> amp_m2:=evalf((subs(n=2,Fator_Ganho)))*evalf(subs(n=2,sqrt((a[n])
  ^2+(b[n])^2)));
```

$$amp\_m2 := 0.95786 \tag{1.53}$$

```
> amp_po:=evalf((subs(n=0,Fator_Ganho)))*evalf(a[0]/2);
```

$$amp\_po := 13.159 \tag{1.54}$$

A RESPOSTA ESTÁ CORRETA!!!

A forma compacta da resposta (saída) do sistema é dada por

$saida = \sum_{n=1}^{\infty} [Amp\_entrada]\,[Fat\_ganho] \sin\left(n\,\omega_n\,t + \Phi_n + \psi_n\right)$, onde Φ_n denota a fase da carga e ψ_n a fase da tensão.

```
> Fator_Ganho:=simplify(subs(Dados, 1/((R^2*n^2+(1/C)^2-2*(1/C)*l*
```

```
n^2+l^2*n^4)^(1/2)));
```

$$Fator\_Ganho := \frac{1}{10\sqrt{80\,n\sim^2 + 100 + n\sim^4}} \tag{1.55}$$

```
> carga:=a[0]/2+Sum(ampli[n]*Fator_Ganho)*sin(w[n]*t+Phi[n]+psi[n])
;
```

$$carga := \frac{400\,\pi^2}{3} + \left(\sum \frac{80\,(-1)^{1+n\sim}}{n\sim^2\sqrt{80\,n\sim^2 + 100 + n\sim^4}}\right)\cos\left(n\sim t + \psi_{n\sim}\right) \tag{1.56}$$

Agora, **para conferir o resultado:** neste problema, a maior amplitude da tensão é a primeira, então calcula-se a aplitude do primeiro termo da tensão multiplicada pelo fator de ganho

```
> amp_max:=evalf(subs((n=1,N=1),Fator_Ganho)*subs(n=1,sqrt(a[n]^2+b
[n]^2)));
```

$$amp\_max := 5.9465 \tag{1.57}$$

ou na p-ésima amplitude

```
> Amplit1 := evalf(subs(p=1,Amplitp));
```

$$Amplit1 := 5.9465 \tag{1.58}$$

==
=============================