

Exemplos de resolução de E.D.Parcial com a transformada de Fourier

Equação do Calor (1D)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right), \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

Condição Inicial: $u(x, 0) = f(x)$ ($t = 0$)

*Equação da Difusão em uma barra de comprimento infinito, superfície lateral isolada, $K = \frac{k}{\rho \sigma}$ é o coeficiente de difusividade térmica (k é o coef. de cond. térmica, ρ é a densidade específica e σ é o calor específico) e temperatura inicial dada por $f(x)$.
 Não há fonte externa de calor.*

```
> restart;with(inttrans):with(plots):with(plottools):K:=1/4;
Dar entrada à equação diferencial
> edp := diff(u(x,t),t)=K*diff(u(x,t),x$2);
Definir a temperatura inicial dada por f(x)=e-x2
> f(x):=exp(-x^2);
Primeiro passo: aplica-se a T. de Fourier na condição inicial e na EDP
Calcular a transformada de Fourier da condição inicial (na forma integral)
> U(w,0):=Int(f(x)*exp(-I*w*x),x=-infinity..infinity);
Calcular a integral
> U(w,0):=value(%);
A transformada, na variável x, da equação diferencial é
> t_edp:=fourier(edp,x,w);
Para compreender melhor, troca-se a transformada para anotação usada em aula
> t_edp1:=subs(fourier(u(x,t),x,w)=U(w,t),t_edp);
Segundo passo: resolve-se a E.D.Ordinária na variável t.
> with(DEtools):U_tempo:=dsolve(diff(U(t),t$1)=-K*omega^2*U(t));
> constante:=solve(subs({U(t)=U(w,0),t=0},U_tempo),_C1);
> U(w,t):=(subs(_C1=constante,rhs(U_tempo)));
Terceiro passo: aplica-se a transformada inversa
```

```
> U(w,t):=U(w,0)*exp(-K*w^2*t);u(x,t):=1/(2*Pi)*Int(U(w,t)*exp(-I*  
w*x),w=-infinity..infinity);assume(t>0):u(x,t):=simplify(value(  
));
```

Observe que a temperatura é transiente, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$

```
> evalc(limit(u(x,t),t=infinity));
```

Para visualizar a animação clique no "play", quando surgir o gráfico

```
> animate(u(x,t),x=-5..5,t=0..250,thickness=2,title=`Perfil de  
Temperatura com animação`);
```

```
> u(x,0):=subs(t=0,u(x,t)): u(x,1):=subs(t=1,u(x,t)): u(x,2):=subs  
(t=2,u(x,t)): u(x,3):=subs(t=3,u(x,t)): u(x,4):=subs(t=4,u(x,t)):  
u(x,5):=subs(t=250,u(x,t)):
```

```
> plot({u(x,0),u(x,1),u(x,2),u(x,3),u(x,4),u(x,5)},x=-5..5,  
thickness=2,title=`Perfil da Temperatura para diversos tempos`);
```